Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2017**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. T. Surowiec, A. Kröck, A. Sieber

Übungen zur Nichtlinearen Optimierung
5. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 (Abstiegsrichtungen) (10)

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x_1^4 + x_1x_2 + (1 + x_2)^2$ und den Startpunkt $x_0 = (0, 0)^T$.

(i) Sind die Richtungen des steilsten Abstiegs und die Newton-Richtung Abstiegsrichtungen im Punkt x_0?

(ii) Betrachten Sie nun die Funktion $h(x) = \nabla f(x)^T \nabla f(x)$. Ist die Newton-Richtung im Punkt x_0 eine Abstiegsrichtung für die Funktion h?

(iii) Wann ist für eine allgemeine Funktion $f \in \mathcal{C}^2$ und allgemeinen Punkt x die Newton-Richtung eine Abstiegsrichtung für f?

Aufgabe 2 (Steepest-Descent Method) (10)

Betrachten Sie das Problem

$$\min \qquad f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2.$$

(i) Der Startpunkt sei $x_0 = (2, 1)^T$. Zeigen Sie, dass dann der Algorithmus des steilsten Abstiegs mit exakter Liniensuche die Folge der Punkte

$$x_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k \begin{pmatrix} 2 \\ (-1)^k \end{pmatrix}$$

generiert.

(ii) Zeigen Sie, dass $f(x_{k+1}) = \frac{1}{9} f(x_k)$.

(iii) Vergleichen Sie das Ergebnis in (ii) mit den Schranken für die Konvergenzrate der Methode des steilsten Abstiegs zur Minimierung einer quadratischen Funktion. Was können Sie bezüglich dieser Methode daraus folgern?

Aufgabe 3 (Steepest-Descent Method) (5)

Nehmen Sie an, dass die Methode des steilsten Abstiegs zur Minimierung der quadratischen Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^TQx - c^Tx$ verwendet wird, und dass Q eine positiv definite Matrix ist. Zeigen Sie

$$\nabla f(x_{k+1}) = \nabla f(x_k) - \frac{\nabla f(x_k)^T \nabla f(x_k)}{\nabla f(x_k)^T Q \nabla f(x_k)} Q \nabla f(x_k).$$

Aufgabe 4 (Trust-Region) (15)

Es sei $\nabla^2 f(x)$ positiv definit, p_N die Newton-Richtung im Punkt x und p_C die Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \min_{\alpha} \quad & q(-\alpha \nabla f(x)) \\ \text{s.t.} \quad & \|\alpha \nabla f(x)\| \leq \Delta. \end{aligned}$$

(i) Bestimmen Sie eine Formel für $\bar{\alpha}$, sodass $p_C = -\bar{\alpha}\nabla f(x)$ erfüllt ist.

(ii) Für $0 \leq \alpha \leq 1$ definiere

$$p(\alpha) = p_C + \alpha(p_N - p_C).$$

Zeigen Sie, dass $\|p(\alpha)\|$ als Funktion in α streng monoton wachsend ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\|p(\alpha)\|^2\right)$.

(iii) Zeigen Sie, dass $q(p(\alpha))$ als Funktion in α streng monoton fallend ist.

(iv) Zeigen Sie, dass ein eindeutiger Wert α_* mit $\|p(\alpha_*)\| = \Delta$ existiert.

Abgabe: Dienstag, 6. Juni 2017, vor der Vorlesung