

## Übungen zur NICHTLINEAREN OPTIMIERUNG

## 8. Aufgabenblatt

**Aufgabe 1 (CG-Verfahren)** (10)

In dieser Aufgabe soll untersucht werden, wie wichtig die Wahl  $p_0 = r_0$  der Starttrichtung für das CG-Verfahren ist. Betrachten Sie dazu das Problem

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie den Startpunkt  $x_0 = (1, 1)^T$ . Anstelle von  $p_0 = r_0$  verwenden Sie  $p_0 = (-1, 0)^T$ . Führen Sie zwei Iterationen des CG-Verfahrens durch. Nennen Sie alle Eigenschaften des normalen CG-Verfahrens, die in diesen beiden Iterationen nicht erfüllt sind.

**Aufgabe 2 (CG-Verfahren)** (10)

Zeigen Sie: Für die Schrittweite  $\alpha_i$  des CG-Verfahrens gilt

$$\alpha_i = \frac{b^T p_i}{p_i^T A p_i} = \frac{r_i^T r_i}{p_i^T A p_i}.$$

**Aufgabe 3 (CG-Verfahren)** (5)

Zeigen Sie: Ist  $A = \kappa I$  für ein  $\kappa > 0$ , so konvergiert das CG-Verfahren in einer Iteration.

**Aufgabe 4 (CG-Verfahren)** (15)

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass beim Einsatz des CG-Verfahrens zur Lösung von  $Ax = b$  die Norm der Fehler monoton fallend ist.

- (i) Zeigen Sie: Für die konjugierten Richtungen gilt  $p_i^T p_j \geq 0$  für alle  $i, j$ .
- (ii) Zeigen Sie: Für die Approximationen der Lösung gilt  $\|x_i\| \geq \|x_{i-1}\|$  für alle  $i$ .  
Hinweis: Bei der verwendeten Norm handelt es sich um die 2-Norm.
- (iii) Sie  $x^*$  die exakte Lösung von  $Ax = b$ . Zeigen Sie, dass für den Fehler  $\|x_i - x^*\| \leq \|x_{i-1} - x^*\|$  für alle  $i$  gilt.

**Abgabe:** Dienstag, 27. Juni 2017, vor der Vorlesung.