Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2017**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. T. Surowiec, A. Kröck, A. Sieber

Übungen zur Nichtlinearen Optimierung
9. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 (Konvergenz des inexakten Newton-Verfahrens) (15)
Nehmen Sie an, dass die innere Iteration des inexakten Newton-Verfahrens die Parameter $\{\phi_k\}$ mit $\phi_k \to 0$ verwendet. Nehmen Sie weiter an, dass $x_k \to x^*$ und $\nabla^2 f(x^*)$ positiv definit ist. Verwenden Sie Satz 3.8 (Superlineare Konvergenz eines Newton-ähnlichen Verfahrens) der Vorlesung um zu zeigen, dass das inexakte Newton-Verfahren superlinear konvergiert.

Aufgabe 2 (Vorkonditionierung) (5)
Betrachten Sie das präkonditionierte Gleichungssystem $M^{-1}Ax = M^{-1}b$. Die Vektoren $\{p_i\}$ und $\{r_i\}$ seien durch die Formeln des präkonditionierten CG-Verfahrens gegeben.
Zeigen Sie, dass dann

$$r_i^T M^{-1} r_j = 0, \quad r_i^T p_j = 0 \quad \text{und} \quad p_i^T M^{1/2} A M^{1/2} p_j = 0$$

für alle $i > j$ gilt.

Aufgabe 3 (Restringierte Optimierung) (10)
Beweisen Sie Lemma 6.4 der Vorlesung: Ist x^* ein zulässiger Punkt und Z eine Basismatrix für den Nullraum $\mathcal{N}(A)$ mit $Z^T \nabla f(x^*) = 0$ und $p^T \nabla^2 f(x^*) p > 0$ für alle $p \in \mathcal{N}(A)$, dann ist x^* strikt lokaler Minimierer von f über $\{x \mid Ax = b\}$.

Aufgabe 4 (Optimalität bei restringierten Problemen) (10)
Bestimmen Sie die Minimierer bzw. Maximierer der folgenden Funktionen mit den gegebenen Nebenbedingungen.

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= x_1 x_2^3 \quad \text{u.d.N. } 2x_1 + 3x_2 = 4,\\
f(x_1, x_2) &= 2x_1 - 3x_2 \quad \text{u.d.N. } x_1^2 + x_2^2 = 25,\\
f(x_1, x_2) &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \quad \text{u.d.N. } 3x_1^2 + x_2^2 = 9,\\
f(x_1, x_2) &= 3x_1^3 + 2x_2^3 \quad \text{u.d.N. } x_1^2 + x_2^2 = 4,\\
f(x_1, x_2) &= \frac{1}{3}x_1^3 + x_2 \quad \text{u.d.N. } x_1^2 + x_2^2 = 1.
\end{aligned}$$

Abgabe: Dienstag, 4. Juli 2017, vor der Vorlesung.