Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2017**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. T. Surowiec, A. Kröck, A. Sieber

Übungen zur Nichtlinearen Optimierung
Probeklausur

Aufgabe 1 (Konvexität) (-)

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i |x_i|$ für $\beta_i > 0$ konvex ist.

(ii) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex. Ein Vektor $g_x \in \mathbb{R}^n$ mit $f(y) \geq f(x) + g_x^T(y - x)$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ heißt Subgradient von f in x. Das Subdifferential $\partial f(x)$ ist definiert als die Menge aller Subgradienten. Bestimmen Sie das Subdifferential $\partial|\cdot|(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und $x^* \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: x^* ist globaler Minimierer genau dann, wenn $0 \in \partial g(x^*)$.

(iv) Sei A eine orthogonale Matrix. Geben Sie eine Charakterisierung für einen Minimierer x^* der Funktion f an.

Aufgabe 2 (Newton-Verfahren) (-)

Betrachten Sie die Minimierung der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + e^{-x}$.

(i) Geben Sie die notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung für dieses Problem an.

(ii) Geben Sie den klassischen Newton-Schritt zur Minimierung der Funktion f an.

(iii) Sei $T : Y \to Y$ eine Abbildung. Ein Punkt $y_0 \in Y$ heißt Fixpunkt, falls $T(y_0) = y_0$. Eine Abbildung $T : (Y, d) \to (Y, d)$ eines metrischen Raumes in sich selbst heißt Kontraktion bezüglich d, falls eine Konstante $\alpha < 1$ existiert, so dass $d(Tx, Ty) \leq \alpha\, d(x, y)$ für alle $x, y \in Y$ gilt.

Banachscher Fixpunktsatz: Sei (Y, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : Y \to Y$ eine Kontraktion bezüglich d. Dann ist T stetig und besitzt genau einen Fixpunkt.

Betrachten Sie die Funktion $F(x) = \frac{e^{-x}(x+1)}{e^{-x}+1}$ auf dem Intervall $(0.5, 0.75)$. Zeigen Sie, dass die Funktion $F : \overline{B_\epsilon(0.6)} \to \overline{B_\epsilon(0.6)}$ eine Kontraktion bezüglich $d(x, y) = |x - y|$ für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ ist.

(iv) Folgern Sie, dass das Newton-Verfahren für einen Startpunkt $x_0 \in \overline{B_\epsilon(0.6)}$ gegen den lokalen Minimierer x^* der Funktion f konvergiert.

Aufgabe 3 (Quasi-Newton-Verfahren und Liniensuche) (-)

Sei B_{k+1} durch das BFGS-Update von B_k bestimmt.

(i) Zeigen Sie, dass B_{k+1} die Sekantengleichung erfüllt.

(ii) Nehmen Sie an, dass zum Abbruch der Liniensuche die schwache Wolfe-Bedingung verwendet wird. Zeigen Sie, dass dann $y_k^T s_k > 0$ gilt.

(iii) Nehmen Sie an, dass zum Abbruch der Liniensuche die starke Wolfe-Bedingung verwendet wird. Zeigen Sie, dass für hinreichend großes η dann $y_k^T s_k > 0$ gilt.

(iv) Folgern Sie, dass die Matrix B_{k+1} positiv definit ist.

Aufgabe 4 (Trust-Region-Verfahren) (-)

(i) Formulieren Sie das Trust-Region-Subproblem und geben Sie mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren die notwendigen Optimalitätsbedingungen an.
Hinweis: Verwenden Sie diese Optimalitätsbedingungen, um die folgenden Aufgabenteile zu bearbeiten.

(ii) Zeigen Sie: Für $\lambda \neq 0$ löst p_k das Problem

$$\begin{array}{ll} \min & q_k(p) \\ \text{s.t.} & \|p\| = \Delta_k \end{array} .$$

Hinweis: Zeigen Sie $q_k(p_k) \leq q_k(p) + \frac{1}{2}\lambda(p^T p - p_k^T p_k)$ für alle p.

(iii) Zeigen Sie: Ist $\lambda = 0$ und $\nabla^2 f(x_k)$ positiv definit, so löst p_k das Trust-Region-Subproblem.

(iv) Zeigen Sie: Wenn das Trust-Region-Subproblem keine Lösung mit $\|p_k\| = \Delta_k$ hat, so ist $\nabla^2 f(x_k)$ positiv definit und $\|\nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k)\| < \Delta_k$.

Aufgabe 5 (Nichtlineare Optimierung) (-)

Betrachten Sie das ungleichungsbeschränkte Minimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & l \leq x \leq u \end{array}$$

mit $l < u$. Es sei x^* ein lokaler Minimierer dieses Problems.

(i) Verwenden Sie die Lagrange-Multiplikatoren, um die notwendigen Optimalitätsbedingungen zu formulieren.

(ii) Zeigen Sie, dass gilt

$$\begin{aligned} x_i^* = l_i \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} \geq 0, \\ x_i^* = u_i \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} \leq 0, \\ l_i < x_i^* < u_i \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = 0. \end{aligned}$$

Abgabe: KEINE. Besprechung der Aufgaben in den Tutorien am 20. Juli 2017.