Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher
Dr. Octavio Paniagua

Sommersemester 2012

Übungen zur Analysis 3

– Blatt 1 –

Abgabe Donnerstag, 19.4.2012

Aufgabe 1 (3 Punkte).

1. Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten $c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{\varphi_n(x)}\,dx$ der für $a < \pi$ definierten Funktion $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad |x| \leq a \\ 0 & \text{falls} \quad a < |x| < \pi \end{cases},$$
bezüglich des Orthonormal-Systems $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$.

2. Berechnen Sie, mittels des Satzes von Parseval, den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(na)}{n^2}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte).

1. Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten für die Funktion $f(x) = x^2 + x$, $-\pi \leq x \leq \pi$, $f(x) = f(x + 2\pi)$, bezüglich des Orthonormal-Systems $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$.

2. Zeigen Sie, dass die Fourier Reihe für die Funktion $f(x) = x^4$ durch
$$x^4 \sim \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} 8 \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} (\pi^2 n^2 - 6) \cos(nx),$$
gegeben ist. Benutzen Sie diese Reihe zur Berechnung des Wertes von
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}, \tag{1}$$
hinter Benuntzung der Tatsache, dass $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi}{12}$. Die Reihe (1) ist gleichmäßig konvergent. Berechnen Sie, mittels dieser Tatsache, die Fourier Reihe für die Funktion $f(x) = x^3$.

Aufgabe 3 (4 Punkte).

1. Zeigen Sie, dass die Fourier-Reihe für die Funktion $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$, $f(x) = f(x + 2\pi)$, bezüglich des Orthonormal-Systems $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$, durch
$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$
gegeben ist.

2. Berechnen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

Aufgabe 4 (3 Punkte).

1. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \tag{2}$$

für alle $x \in [-\pi, \pi]$ konvergiert.

2. Zeigen Sie, dass die Reihe (2) nicht Fourier-Reihe einer $L^2_{per}([-\pi, \pi])$-Funktion ist.