Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher
Dr. Octavio Paniagua

Sommersemester 2012

Übungen zur Analysis 3
– Blatt 2 –
Abgabe Dienstag, 24.4.2012

Aufgabe 5 (2 Punkte).

Man beweise, daß $\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x\right\}_{n=1}^{\infty}$ ein ON-System in $\mathrm{L}^2_{per}([0,l])$ ist, wobei $l>0$.

Aufgabe 6 (2 Punkte). Sei $f \in C^k([0,1])$ und mögen die Ableitungen $f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(k-1)}$ bei 0 und 1 verschwinden. Zeigen Sie, daß eine Konstante A existiert mit

$$|c_n| \leq An^{-k},$$

wobei $c_n = \sqrt{2}\int_0^1 f(x)\sin n\pi x x$ der n-te Fourier-Koeffizient von f ist.

Aufgabe 7 (4 Punkte). Sei $l>0$. Wir betrachten auf $[0,l]\times\mathbb{R}^+$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t), \qquad t \geq 0,\, 0 \leq x \leq l,\, c>0, \tag{1}$$

mit der Anfangsbedingung $u(x,0)=\phi(x)=x^2$ auf $[0,l]$.

1. Benutzen Sie einen Separationsatz $u(x,t)=T(t)X(x)$, um die allgemeinen Lösungen von (1), ohne Berücksichtigung der Anfangsbedingungen, zu bestimmen.

2. Konstruieren Sie mittels Überlagerung der gefundenen allgemeinen Lösungen und der Fourier-Methode eine Lösung von (1), welche der Anfangsbedingung genügt.