Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher
Dr. Octavio Paniagua

Sommersemester 2012

# Übungen zur Analysis 3

– Blatt 3 –

Abgabe Mittwoch, 02.05.2012

**Aufgabe 8** (6 Punkte **Vektorfelder**).

Ist $\vec{F}$ ein Vektorfeld definiert auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit den Komponenten $\vec{F} = (F^1, \ldots, F^n)$, so definieren wir dessen Divergenz $\operatorname{div}(\vec{F})$ als Funktion auf $U$ durch

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F^i}{\partial x^i} \tag{1}$$

1. Ist $h : U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so gilt $\operatorname{div}\,(h \cdot \vec{F}) = h{\cdot}\operatorname{div}(\vec{F}) + \left\langle \operatorname{grad}(h), \vec{F} \right\rangle$.

2. Ist $h : U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und $\operatorname{grad}(h)$ das Gradientvektorfeld, so gilt $\Delta h = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(h))$, wobei $\Delta$ der Laplace-Operator
$$\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{(\partial x^n)^2}$$
ist.

3. Sei $\vec{F}$ ein glattes Vektorfeld definiert auf $U \subset \mathbb{R}^n$ und $W \subset U$ ein Würfel, der den Träger $\operatorname{supp}(\vec{F})$ umfaßt, d.h. $\operatorname{supp}(\vec{F}) \subset W$. Beweisen Sie unter Verwendung des Satzes von Fubini
$$\int_W \operatorname{div}(\vec{F}) = 0.$$
Insbesondere gilt $\int_W \Delta f = 0$ für jede $C^2$-Funktion mit $\operatorname{supp}(f) \subset W$.

4. Ist $\vec{F} = (F^1, F^2, F^3)$ ein Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$ des dreidimensionalen Raumes, so definieren wir dessen Rotation $\operatorname{rot}(\vec{F})$ als neues Vektorfeld auf $U$ durch
$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \left( \frac{\partial F^3}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial z}, \frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial x}, \frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y} \right). \tag{2}$$
Beweisen Sie folgende Formeln:
$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{F})) = 0, \quad \operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = 0, \quad \operatorname{rot}(h \cdot \vec{F}) = h \cdot \operatorname{rot}(\vec{F}) + \operatorname{grad}(h) \times \vec{F}.$$

**Aufgabe 9** (3 Punkte). Berechnen Sue das äußere Differential $d\omega^k$ folgender Differentialformen $\omega^k$:

1. $xydx \wedge dy + 2xdy \wedge dz + 2ydx \wedge dz$;
2. $z^2dx \wedge y + (z^2 + 2y)dx \wedge dz$;
3. $13xdx + y^2dy + xyzdz$;
4. $e^x \cos(y)dx - e^x \sin(y)dy$;
5. $xdy \wedge dz + ydx \wedge dz + zdx \wedge dy$.
6. $xdy \wedge dz + \cos xydx \wedge dz + z \sin ydx \wedge dy$.