Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher
Dr. Octavio Paniagua

Sommersemester 2012

Übungen zur Analysis 3
– Blatt 4 –
Abgabe Dienstag, 08.05.2012

Aufgabe 10 (6 Punkte, Kurvenintegrale). Sei c ein 1-Würfel, d.h. eine parametrisierte C^1-Kurve $c : [0,1] \to U \subset \mathbb{R}^n$ Man nennt das Integral der 1-Form $\omega^1 = p_1 dx^1 + \cdots + p_n dx^n$ das Kurvenintegral von ω^1 entlang c. Sind $c^1, \ldots, c^n$ die Komponentenfuktionen von c, so schreibt sich die zurückgezogene Form

$$c^*\omega^1(t) = p_1(c(t)) \cdot \frac{dc^1(t)}{dt} dt + \cdots + p_n(c(t)) \cdot \frac{dc^n(t)}{dt} dt,$$

und somit erhält man für das Kurvenintegral in dieser Situation die allgemeine Formel

$$\int_c \omega^1 = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n p_i(c(t)) \cdot \frac{dc^i(t)}{dt} \right) dt$$

1. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, wobei C die Kurve $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, \quad y = x^2\}$ ist.
2. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C (\sin(y)dx + \sin(x)dy$, wobei C ist die Strecke in $\mathbb{R}^2$ zwischen den Punkten $(0,\pi)$ und $(\pi, 0)$ ist.
3. Berechnen Sie $\int_C \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ mit $C_n : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, wobei $C_n(t) = (r\cos(2\pi nt), r\sin(2\pi nt))$ ist.

Aufgabe 11 (2 Punkte). Wir betrachten den R^{2n} mit den Koordinaten $x^1, \ldots, x^{2n}$ und darauf die Differentialform vom Grad 2

$$\omega^2 = dx^1 \wedge dx^{n+1} + dx^2 \wedge dx^{n+2} + \cdots + dx^n \wedge dx^{2n}$$

Man beweise:

1. Die Form ω^2 ist geschlossen.
2. Die n-te äußere Potenz von ω^2 steht mit der Volumenform in Beziehung über die Formel
$$w^2 \wedge \cdots \wedge w^2 = (-1)^{n(n-1)/2} n! dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{2n}.$$

Aufgabe 12 (3 Punkte). Gegenstand dieser Aufgabe ist es zu begründen, warum es Sinn macht, die anhand der Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ des $\mathbb{R}^n$ definierten Vektorfeld $x \mapsto (x, e_i)$ mit $\partial/\partial x^i$ zu bezeichnen. Wir nennen dieses Vektorfeld vorläufig E_i und können folglich jedes weitere Vektorfeld in der Form

$$\mathcal{V} = \sum_{i=1}^n V^i(x) \cdot E_i$$

schreiben. Für jede Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge U des $\mathbb{R}^n$ definieren wir eine neue Funktion, die Ableitung von f in Richtung des Vektorfeldes $\mathcal{V}$, durch

$$(\mathcal{V}(f))(x) := (Df_x)(\mathcal{V}(x))$$

Man beweise die Formel

$$\mathcal{V}(f) = \left(\sum_{i=1}^n V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right)(f),$$

welche bei Weglassen des Arguments f die gewünschte Begründung liefert.

Aufgabe 13 (3 Punkte). Man beweise folgende Rechenregeln für Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$.

1. $\mathrm{div}(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2) = \langle \mathrm{rot}(\mathcal{V}_1), \mathcal{V}_2 \rangle - \langle \mathcal{V}_1, \mathrm{rot}(\mathcal{V}_2) \rangle$.
2. $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\mathcal{V})) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}(\mathcal{V})) - \Delta(\mathcal{V})$, wobei der Laplace-Operator komponentenweise auf $\mathcal{V}$ anzuwenden ist.