Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher
Dr. Octavio Paniagua

Sommersemester 2012

Übungen zur Analysis 3
– Blatt 5 –
Abgabe Dienstag, 15.05.2012

Aufgabe 14 (2 Punkte). Sei $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $c : [0,1] \to U \subset \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Beweisen Sie

$$\int_c df = f(c(1)) - f(c(0)).$$

Aufgabe 15 (3 Punkte). Beweisen Sie, dass folgende Kurvenintegrale nur von den Endpunkten der Wege, jedoch nicht von den Kurven selbst abhängen:

$$\int xdy + ydx, \quad \int xdx + ydy, \quad \int \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Aufgabe 16 (2 Punkte). Die Differentialform $\frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ ist auf $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ geschlossen, aber nicht exakt.

Aufgabe 17 (3 Punkte). Wir betrachten den singulären 2-Würfel $f : [0.2\pi] \times [0,\pi] \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$, welcher durch $f(u,v) = (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), cos(v))$ gegeben ist, sowie die 2-Form

$$\omega^2 = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Zeigen Sie:

1. ω^2 ist eine geschlossene 2-Form auf $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$, die nicht exakt ist.
2. Es existiert keine singuläre 3-Kette c^3 im Raum $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ mit $\partial c^3 = f$.

Aufgabe 18 (2 Punkte). Sei $\omega^1 = fdx$ eine 1-Form auf dem Intervall $[0,1]$ mit $f(0) = f(1)$. Wann existiert eine reelle Zahl p und eine Funktion g mit

$$\omega^1 = pdx + dg \quad \text{und}\, g(0) = g(1)?$$

Aufgabe 19 (2 Punkte). Zwei singuläre 1-Simplizes $c_0, c_1 : [a,b] \to U \subset \mathbb{R}^n$ heißen *homotop* in der Menge U, falls eine glatte Abbildung $F : [a,b] \times [0,1] \to U$ mit $F(x,0) = c_0(x)$, $F(x,1) = c_1(x)$, $F(a,t) = c_0(a) = c_1(a)$ und $F(b,t) = c_0(b) = c_1(b)$ existiert.

Beweisen Sie: Sind c_0, c_1 zwei homotope 1-Simplizes und ist ω^1 eine auf $U \subset \mathbb{R}^n$ geschlossene 1-Form, so gilt

$$\int_{c_0} \omega^1 = \int_{c_1} \omega^1$$

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Stokes. Leiten Sie daraus, dass die Kurve $C_n : [0,1] \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ genau dann homotop zur Kurve C_m ist, falls $n = m$ gilt.

$$C_n(t) = (r\cos(2\pi nt), r\sin(2\pi nt)).$$