Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher
Dr. Octavio Paniagua

Sommersemester 2012

Übungen zur Analysis 3
– Blatt 6 –
Abgabe Dienstag, 22.05.2012

Aufgabe 20 (3 Punkte). Sei ω^1 eine geschlossene 1-Form auf $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. Beweisen Sie, dass eine eindeutig bestimmte Zahl p mit

$$\omega^1 = p\left(\frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\right) + dg$$

für eine bestimmte (bis auf eine Konstante eindeutig bestimmte) Funktion $g : \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ existiert. Hinweis: Betrachte $c_r : [0,1] \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, $c_r(t) = (r\cos(2\pi t), r\sin(2\pi t))$. Stelle $c_r^*(\omega^1)$ gemäß Aufgabe 18 dar als $c_r^*(\omega^1) = p_r dx + d(g_r)$ und zeige, dass p_r nicht von r abhängt.

Aufgabe 21 (6 Punkte, komplexwertige Differentialformen). Ist $\omega^k = \omega_1^k + i\omega_2^k$ eine komplexwertige k-Form auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, so definieren wir

$$d\omega^k := d\omega_1^k + id\omega_2^k, \quad \int \omega^k := \int \omega_1^k + i\int \omega_2^k, \quad dz = dx + idy$$

1. Sein $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f = u + iv$ und $u : U_1, \to \mathbb{C}$, $v : U_2 \to \mathbb{C}$ mit u, v $\mathbb{R}$-differenzierbar. Beweisen Sie, dass $d(fdz) = 0$ genau dann gilt, wenn $f = u + iv$ die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt.
2. (Satz von Cauchy) Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-differenzierbare Funktion und sei $c^1 : [a,b] \to U$ ein singulärer 1-Simplex mit $c^1(a) = c^1(b)$. Existiere weiterhin eine singuläre 2-Kette c^2 in der Menge U mit $\partial c^2 = c^1$. Beweisen Sie
$$\int_{c^1} f(z)dz = 0$$
3. Man beweise $\int_{c_n} \frac{1}{z}dz = 2\pi in$ mit $c_n(t) = e^{2\pi itn}$, $0 \le t \le 1$.

Aufgabe 22 (2 Punkte). Man betrachte auf $\mathbb{R}^3$ die Differentialform $\omega^2 = ydx \wedge dy$. Man bestimme alle 1-Formen $\eta^1 = pdx + qdy$, die $d\eta^1 = \omega^2$ erfüllen.

Aufgabe 23 (2 Punkte). Ist ω^1 eine 1-Form, definiert auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, und ist das Kurvenintegral über ω^1 wegunabhängig, dann ist ω^1 exakt. Hinweis: Man beweise dies, indem man explizit eine "Stammfunktion"konstruiert.

Aufgabe 24 (3 Punkte). Man betrachte auf $\mathbb{R}^3$ die exakte Differentialform

$$w^2 = xydx \wedge dy + 2xdy \wedge dz + 2ydx \wedge dz,$$

sowie die obere Halbkugel $A \subset S^2$

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \ge 0\}.$$

Man zeige, dass das Integral von ω^2 über A verschwindet.