Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher
Dr. Octavio Paniagua

Sommersemester 2012

Übungen zur Analysis 3
– Blatt 7 –
Abgabe Dienstag, 29.05.2012

Aufgabe 25 (2 Punkte). Sei $\mathcal{H}$ ein unendlich-dimensionaler Hilbertraum und $D = \{x \in \mathcal{H} \mid \|x\| \leq 1\}$, seine Einheitskugel. Hat D die Fixpunkteigenschaft?

Aufgabe 26 (2 Punkte). Eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raums X heißt Retrakt von X, falls eine stetige Abbildung $r : X \to A$ mit $r(a) = a$ für alle Punkte $a \in A$ existiert. Man beweise dass, wenn X die Fixpunkteigenschaft hat, so hat auch jeder Retrakt A von X die Fixpunkteigenschaft.

Aufgabe 27 (2 Punkte). Man zeige dass, die Menge $A = \{(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \mid xy = 0\}$ hat die Fixpunkteigenschaft.

Aufgabe 28 (6 Punkte).

1. Man zeige dass, die Gleichung
$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1, \quad a_1, \ldots, a_n > 0,$$
fest, definiert eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, den Ellipsoiden.

2. Man zeige dass, die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ $(r > 0)$ definiert eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, den Zylinder.

3. Wir betrachten für jedes $c \in \mathbb{R}$ die durch
$$M_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = c\}$$
definierte Teilmenge des $\mathbb{R}^3$. Für welche Parameterwerte c ist M_c eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 29 (2 Punkte). Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein komplexes Polynom $f = \sum_{i=0}^{k} a_i z^i$ ohne doppelte Nullstellen. Wir betrachten für jede natürliche Zahl $l \geq 2$ die Menge
$$M = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^l - f(z) = 0\}.$$
Man beweise, dass M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$ ist. Durch $(z, w) \mapsto w$ wird eindeutig eine Abbildung $G : M \to \mathbb{C}$ definiert und es gilt $G^l(z, w) = f(z)$. Die Menge M ist eine sogenannte *Riemannsche Fläche*. Auf ihr ist die l-te Wurzel aus $f(z)$ eindeutig erklärt.