Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher
Dr. Octavio Paniagua

Sommersemester 2012

Übungen zur Analysis 3
– Blatt 8 –
Abgabe Dienstag, 05.06.2012

Aufgabe 30 (4 Punkte). Wir betrachten die *spezielle lineare Gruppe* $SL_2(\mathbb{R})$ aller reellwertigen (2×2)-Matrizen der Determinante 1:

$$SL_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

Man beweise, dass die $SL_2(\mathbb{R})$ eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit und dass ihr Tangentialraum im neutralen Element Id durch

$$T_{\mathrm{Id}}SL_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 0\}$$

gegeben ist. Hinweise: Man verwende die Formel $\det(\exp A) = e^{\operatorname{tr} A}$.

Aufgabe 31 (3 Punkte). Man beweise, dass die *orthogonale Gruppe* $O_n(\mathbb{R})$ der orthogonalen $(n\times n)$-Matrizen

$$O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^t = \mathrm{Id}\}$$

eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n^2}$ ist, deren Dimension man ferner bestimme. Ist die Untergruppe $SO_n(\mathbb{R})$ aller orthogonalen Matrizen der Determinante 1 ebenfalls eine Untermannigfaltigkeit, und wenn ja, welche Dimension hat sie und in welcher Beziehung steht sie zur $O_n(\mathbb{R})$?

Aufgabe 32 (2 Punkte). Das Produkt einer Mannigfaltigkeit M ohne Rand mit einer beliebigen Mannigfaltigkeit N ist wieder eine Mannigfaltigkeit und hat den Rand $\partial(M\times N) = M \times \partial N$.

Aufgabe 33 (4 Punkte). Der topologische Rand $\mathrm{Fr}(A)$ einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist der Durchschnitt der abgeschlossenen Hülle von A mit der abgeschlossenen Hülle seines Komplements,

$$\mathrm{Fr}(A) := \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \backslash A}.$$

Man beweise:

1. Ist $M^m \subset \mathbb{R}^m$ eine abgeschlossene m-dimensionale Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^m$, so gilt $\partial M^m = \mathrm{Fr}(M^m)$.
2. Ist $M^m \subset \mathbb{R}^n$ $(m < n)$ eine Untermannigfaltigkeit echt kleinerer Dimension mit oder ohne Rand, so gilt stets $\mathrm{Fr}(M^m) = M^m$.

Aufgabe 34 (2 Punkte). Man gebe auf jeder Sphäre ungerader Dimension ein stetiges Vektorfeld der Länge eins an.