Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher
Dr. Octavio Paniagua

Sommersemester 2012

Übungen zur Analysis 3
– Blatt 9 –
Abgabe Dienstag, 12.06.2012

Aufgabe 35 (2 Punkte). Stellen Sie das Vektorfeld $\mathcal{V}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}(\partial/\partial x + \partial/\partial y)$ in den Polarkoordinaten von $\mathbb{R}^2$ dar.

Aufgabe 36 (3 Punkte). Man betrachte auf der Sphäre S^2 das Vektorfeld $\mathcal{V}(x,y,z) = ((x,y,z),(-y,x,0))$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}$ nicht das Gradientenfeld einer Funktion $f : S^2 \to \mathbb{R}$ sein kann. Welcher allgemeine Sachverhalt verbirgt sich hinter diesem Beispiel?

Aufgabe 37 (2 Punkte). Auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ führen wir durch die Karte

$$h(r,\phi,\psi) = (r\cos\phi\cos\psi, r\sin\phi\cos\psi, r\sin\psi)$$

auf dem Parameterbereich $r \in (0,\infty)$, $\phi \in (0,2\pi)$, $\psi \in (-\pi/2,\pi/2)$ Koordinaten ein. Man berechne die Formeln für die Divergenz und den Laplace-Operator in diesen Koordinaten.

Aufgabe 38 (4 Punkte). Sein M^k und N^k k-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Die Abbildung $f : M^k \to N^k$ heißt *winkeltreu* oder auch *konform*, wenn für zwei beliebige Vektoren $w_1, w_2 \in T_x M^k$ und ihre Bildvektoren $v_i = f_{*,x}(w_i) \in T_{f(y)}N^k$ die Winkel zwischen ihnen übereinstimmen:

$$\frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\|v_1\|\|v_2\|} = \frac{\langle w_1, w_2\rangle}{\|w_1\|\|w_2\|}.$$

Ist insbesondere (h,U) eine Karte einer Mannigfaltigkeit M^k, so ist die Kartenabbildung h genau dann winkeltreu, wenn die in ihr ausgedrückte Riemannsche Metrik ein Vielfaches der k-dimensionalen Einheitsmatrix E ist:

$$(g_{ij}(y)) = \lambda(y)E, \quad \lambda(y) > 0$$

Aufgabe 39 (3 Punkte).

1. Sei M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $k < n$. Beweisen Sie, dass M Lebesgue-Nullmaß hat.
2. Sei M eine kompakte k-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass M ist Jordan-messbar.