Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher
Dr. Octavio Paniagua

Sommersemester 2012

Übungen zur Analysis 3
– Blatt 10 –
Abgabe Dienstag, 26.06.2012

Aufgabe 40 (2 Punkte). Man beweise: das Tangentialbündel TM jeder Mannigfaltigkeit M ist stets eine orientierbare Mannigfaltigkeit.

Aufgabe 41 (3 Punkte). Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ eine positive Funktion und $M^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = f^2(x)\}$ die dazugehörige Rotationsfläche in $\mathbb{R}^3$. Man beweise die Volumenformel

$$\mathrm{vol}(M^2) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Aufgabe 42 (3 Punkte). Die Menge aller Einheitstangentialvektoren T_1S^2 an die Sphäre S^2

$$T_1S^2 = \{(x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = \|v\| = 1, \langle x, v\rangle = 0\}$$

ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ und diffeomorph zur Mannigfaltigkeit

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2|z_3|^2 = 1,\ (z_1)^2 + (z_2)^2 + (z_3)^2 = 0\}$$

Aufgabe 43 (3 Punkte). Sei M^k eine Mannigfaltigkeit $h : U \to M^k$ eine Karte sowie $\gamma : [a, b] \to h(U) \subset M^k$ eine Kurve auf M^k, welche ganz im Bild der Kartenabbildung h liegt. Wir stellen die Kurve γ in den Koordinaten (h, U) dar als $h^{-1} \circ \gamma(t) = (y^1(t), \ldots, y^k(t))$. Man beweise, dass die Länge der Kurve mittels der Koeffizienten der Riemannschen Metrik g_{ij} in der Karte (h, U) durch die Formel

$$l(\gamma) = \int_a^b \left(\sum_{i,j=1}^{k} g_{ij}(\gamma(t)) \frac{dy^i(t)}{dt} \frac{dy^j(t)}{dt} \right)^{1/2} dt$$

gegeben ist.

Aufgabe 44 (2 Punkte). Man berechne folgende Oberflächenintegrale:

1. $\int_{M^2}(x + y + z)dM^2$ für $M^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \geq 0\}$;
2. $\int_{M^2}(x^2 + y^2)dM^2$, wobei M^2 der Rand der durch die Ungleichung $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ beschrieben Menge in $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 45 (2 Punkte). Berechne folgende Oberflächenintegrale:

1. $\int_{S^2}(xdy \wedge ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)$.
2. $\int_{M^2}((y-z)dy\wedge dz+(z-x)dz\wedge dx+(x-y)dx\wedge dy)$, wobei M^2 der Rand der durch die Ungleichungen $x^2 + y^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq 1$ beschriebenen Menge in $\mathbb{R}^3 2$ ist.

Aufgabe 46 (4 Punkte).

1. Zeigen Sie, dass Stoke's Satz nicht gilt, falls M nicht kompakt ist.
2. Zeigen Sie, dass Stoke's Satz für nicht kompakte Mannigfaltigkeiten gilt, falls die Forme ω kompakten Träger $A_\omega \subset M$ hat.