Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher
Dr. Octavio Paniagua

Sommersemester 2012

Übungen zur Analysis 3
– Blatt 11 –
Abgabe Dienstag, 03.07.2012

Aufgabe 47 (5 Punkte). Seien $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ und h jeweils glatte Vektorfelder beziehungsweise Funktionen auf einem offenen Gebiet $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$. Man beweise:

1. $\operatorname{div}(\mathbf{rot}(\mathbf{F})) = 0$;
2. $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\, h) = 0$;
3. $\mathbf{rot}(h \cdot \mathbf{F}) = h \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{F}) + \mathbf{grad}\, h \times \mathbf{F}$;
4. ist $\mathcal{O}$ sternförmig und gilt $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = 0$, so existiert eine Funktion $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ mit $\mathbf{F} = \mathbf{grad}\, f$;
5. ist $\mathcal{O}$ sternförmig und gilt $\operatorname{div}(\mathbf{G}) = 0$, so existiert ein Vektorfeld $\mathbf{H}$ mit $\mathbf{G} = \mathbf{rot}\, \mathbf{H}$.

Aufgabe 48 (6 Punkte). Sei M^k eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit ohne Rand. Eine Funktion $f : M^k \to \mathbb{R}$ heißt *Eigenfunktion* des Laplace-Operators zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, falls $\Delta f = \lambda f$ gilt. Man beweise:

1. Sind f_1, f_2 Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so gilt
$$\langle f_1, f_2 \rangle_{L^2} = \int_{M^k} f_1(x) f_2(x) dM^k = 0;$$
2. Sei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Sphäre vom Radius 1, $\Delta^{\mathbb{R}^3}$ der Laplace-Operator des $\mathbb{R}^3$, Δ^{S^2} der Laplace-Operator von S^2 und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ gilt
$$(\Delta^{\mathbb{R}^3} f)|_{S^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 2\frac{\partial f}{\partial r} + \Delta^{S^2}(f|_{S^2})$$
3. Sei $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein homogenes Polynom von Grad m, welches harmonisch ist, d.h. $\Delta^{\mathbb{R}^3} P(x) = 0$ erfüllt. Man zeige, dass $P|_{S^2}$ eine Eigenfunktion des Laplace-Operators von S^2 ist, und bestimme den Eigenwert.

Aufgabe 49 (2 Punkte). Sei M^{n-1} Rand einer kompakten n-dimensionalen Untermannifaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{N}(x)$ das Normalenvektorfeld. Ist $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^3$ ein konstanter Vektor, so gilt
$$\int_{M^{n-1}} \langle \mathcal{N}(x), \mathcal{V} \rangle \cdot dM^{n-1} = 0$$

Aufgabe 50 (2 Punkte). Man berechne, ob die folgenden Funktionen harmonisch sind und auf welchen Bereich.

1. $u(x, y) = e^x \cos y$ und $v(x, y) = e^x \sin y$.
2. $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$, für $(x, y) \neq (0, 0)$.