Fachbereich Mathematik und Informatik Sommersemester 2012
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher
Dr. Octavio Paniagua

Übungen zur Analysis 3
– Blatt 12 –
Abgabe Dienstag, 10.07.2012

Aufgabe 51 (3 Punkte). Betrachten wir Differentialgleichungssysteme der Gestalt

$$y' = A(t)y + g(t) \tag{1}$$

mit stetigen Funktionen $A : I \to \mathbb{R}^{n^2}$ und $g : I \to \mathbb{R}^n$ auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Dann unterscheiden wir den homogen und inhomogen Fall und setzen

$$L_{hom} := \{y : I \to \mathbb{R}^n \mid y \text{ Lösung von } y = A(t)y\}$$

sowie

$$L_{inhom} := \{y : I \to \mathbb{R}^n \mid y \text{ Lösung von } y = A(t)y + g(t)\}$$

Man beweise, dass die Menge L_{hom} bildet einen Vektorraum.

Aufgabe 52 (6 Punkte). Seien $y_1, \ldots, y_k \in L_{hom}$ Lösungen des homogenen Systems $y' = A(t)y$. Man beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. $y_1, \ldots, y_k$ sind linear unabhängig.
2. Es existiert ein $t_0 \in I$ derart, dass die Vektoren $y_1(t_0), \ldots, y_k(t_0) \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind.
3. Für jedes $t \in I$ sind die Vektoren $y_1(t), \ldots, y_k(t) \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig.

Aufgabe 53 (4 Punkte). Man beweise:

1. L_{hom} ist ein n-dimensionaler Vektorraum.
2. $L_{inhom} = y_p + L_{hom}$ ist ein affiner Raum, wobei y_p eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems (1) bezeichnet.

Aufgabe 54 (4 Punkte). Man betrachte das skalares System

$$x' = ax^3 \quad a \in \mathbb{R}$$

1. Man benutzt die Ljapunov Funktion $V(x) = x^4$ zu zeigen, dass das System stabil für $a < 0$ ist und unstabil für $a > 0$ ist.
2. Was kann man sagen über das System für $a = 0$.