

Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 1 –

Abgabe Mittwoch, 21.4.2010

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $k \in \mathbb{N}$ ($= \{0, 1, 2, \dots\}$) und

$$C^k([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar}\},$$

$\partial^j f$ ($= f^{(j)}$) sei die j -te Ableitung von f . Zeigen Sie:

$$C^k([a, b]) \ni f \mapsto \sum_{j=0}^k \|\partial^j f\|_\infty =: \|f\|_{\infty, k}$$

ist eine Norm auf $C^k([a, b])$ und $C^k([a, b])$ ist damit ein Banachraum.

Aufgabe 2 (4 Punkte).

a) Es sei

$$\partial : C^1([0, 1]) \rightarrow C([0, 1]) : f \mapsto \partial f := f'.$$

Untersuchen Sie ∂ auf Stetigkeit als Abbildung

- i) $(C^1([0, 1]), \|\cdot\|_{\infty, 1}) \rightarrow (C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$,
- ii) $(C^1([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$.

b) Zeigen Sie, dass die Identität $f \mapsto f$

- i) als Abbildung $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C([0, 1]), \|\cdot\|_1)$ stetig ist, aber
- ii) als Abbildung $(C([0, 1]), \|\cdot\|_1) \rightarrow (C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ unstetig ist.

c) Bestimmen Sie für die stetigen Abbildungen in a) und b) jeweils die Operatornorm.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

Beweisen Sie, dass X genau dann vollständig ist, wenn gilt:

Für jede Folge $(x_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset X$ mit $\sum_{j=0}^{\infty} \|x_j\| < \infty$ gibt es ein $x \in X$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k x_j = x$.