Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher Sommersemester 2010

Übungen zur Funktionalanalysis
– Blatt 2 –
Abgabe Mittwoch, 28.4.2010

Aufgabe 4 (3 Punkte). Sei H ein Hilbertraum, $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine ONB und $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ein ONS in H mit

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|y_i - z_i\|^2 < 1$$

Zeigen Sie, dass (z_i) ebenfalls ONB von H ist.

Aufgabe 5 (4 Punkte). Für einen $\mathbb{K}$-Vektorraum E sei $E^* = \mathrm{Hom}(E, \mathbb{K})$ der algebraische Dualraum, $E' = \{\eta \in E^* | \eta \text{ stetig}\}$. Zeigen Sie für $\eta \in E^*$:

a) Für jedes $x \in E$ mit $\eta(x) \neq 0$ ist

$$E = \mathrm{Kern}\,\eta \,\oplus\, \mathbb{K}x\,.$$

b) Ist E normiert, so gilt

$$\eta \in E' \iff \mathrm{Kern}\,\eta \subset E \text{ abgeschlossen.}$$

c) η unstetig $\iff$ $\mathrm{Kern}\,\eta =: H \neq E$ und H liegt dicht in E, d.h. $\overline{H} = E$.

Aufgabe 6 (4 Punkte). Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+\|x\|_2}$ und $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto g \cdot f$. Zeigen Sie

a) $T \in \mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ und bestimmen Sie $\|T\|$.

b) Es gibt kein $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ mit $\|Tf\| = \|T\|\,\|f\|$.

Aufgabe 7 (4 Punkte). Sei $H = C_c(]0,1[)$ und

$$H \times H \ni (f,g) \longmapsto \int_0^1 f(t)\,\overline{g(t)}\,dt =: \langle f \,|\, g\rangle.$$

Zeigen Sie:

a) H ist mit dieser Abbildung ein Prä-Hilbertraum, H ist unvollständig.

b) Folgende Menge M ist eine abgeschlossene Hyperebene in H mit $M^\perp = \{0\}$:

$$M = \left\{ f \in H \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \right\}.$$