Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher Sommersemester 2010

Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 3 –

Abgabe Dienstag, 5.05.2010, 14 Uhr

Aufgabe 8 (4 Punkte). Sei $H = L^2([0,1])$ mit der ONB $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $e_k = e^{2\pi i k(\cdot)}$.

a) Sei $f = \mathrm{id}_{[0,1]}$. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $\langle f \,|\, e_k\rangle$ und zeigen Sie damit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

b) Sei $f \in H$ mit $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f \,|\, e_k\rangle| < \infty$. Zeigen Sie: Es ist $f \in C([0,1])$ mit $f(0) = f(1)$ und in $\big(C([0,1]), \|\ \|_\infty\big)$ gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f \,|\, e_k\rangle e_k = f\,.$$

Aufgabe 9 (6 Punkte). Für $f : [-1,1] \to \mathbb{K}$ sei $\tilde{f} : [-1,1] \to \mathbb{K} \mid \tilde{f}(x) = f(-x)$. Es sei $L^2_g([-1,1]) := \{f \in L^2([-1,1]) \mid f = \tilde{f}\}$ der Raum der geraden und $L^2_u([-1,1]) := \{f \in L^2([-1,1]) \mid f = -\tilde{f}\}$ der Raum der ungeraden L^2-Funktionen. Zeigen Sie:

a) $L^2([-1,1])$ ist die orthogonale Summe von $L^2_g([-1,1])$ und $L^2_u([-1,1])$.

b) Folgende Abbildungen sind Norm-Isomorphismen:

$$f \mapsto \sqrt{2} f\,|_{[0,1]} : L^2_g([-1,1]) \to L^2([0,1]),$$
$$f \mapsto \sqrt{2} f\,|_{[0,1]} : L^2_u([-1,1]) \to L^2([0,1]),$$
$$f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} f\Big(\frac{\cdot + 1}{2}\Big) : L^2([0,1]) \to L^2([-1,1])$$

c) Dis Systeme $\{\sqrt{2}\,\sin(k\pi x) \mid k \geq 1\}$ und $\{1, \sqrt{2}\,\cos(k\pi x) \mid k \geq 1\}$ sind ONB von $L^2([0,1])$.

d) Für $f \in C^1([0,1])$ mit $f(0) = f(1) = 0$ ist

$$\|f\|_2 \leq \frac{1}{\pi}\|f'\|_2$$

Für welche solcher f gilt Gleichheit? (Hinweis: Parsevalgleichung)

Aufgabe 10 (4 Punkte). Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $e_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{i\lambda t}$ und sei $H := Span(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Zeigen Sie:

1. Die Abbildung

$$H \times H \ni (f,g) \mapsto \lim_{T \mapsto \infty} \frac{1}{2T} \int_T^T f(t)\overline{g(t)}dt$$

ist ein Skalarprodukt auf H.

2. $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ ist eine ONB von H.