Fachbereich Mathematik und Informatik Sommersemester 2010
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher

Übungen zur Funktionalanalysis
– Blatt 4 –
Abgabe Mittwoch, 19.5.2010, 14 Uhr

Aufgabe 11 (4 Punkte). Zeigen Sie: $\mathcal{C}^1([a,b])$ mit der Norm $f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ ist separabel.

Aufgabe 12 (3 Punkte). Sei E ein reeller, normierter VR, $M \subset E$ ein UVR und $\vartheta : M \to \mathbb{R}$ linear und stetig.

a) Sei $x \in E \setminus M$, $\mu \in \mathbb{R}$,

$$\eta : \mathbb{R} \cdot x \oplus M \to \mathbb{R},\ \lambda\, x + y \mapsto \lambda\mu + \vartheta(y)\ .$$

Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen

i) $\lambda\mu + \vartheta(y) \leq \|\vartheta\|\ \|\lambda\, x + y\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $y \in M$

ii) $-\|\vartheta\|\ \|-x+y\| + \vartheta(y) \leq \mu \leq \|\vartheta\|\ \|x+y\| - \vartheta(y)$ für alle $y \in M$

iii) $-\|\vartheta\|\ \|-x+y\| + \vartheta(y) \leq \|\vartheta\|\ \|x+z\| - \vartheta(z)$ für alle $y, z \in M$.

Zeigen Sie: Es existiert ein μ, so dass *i*) gilt und folgern Sie $\|\eta\| \leq \|\vartheta\|$.

Aufgabe 13 (4 Punkte). Sei E Banachraum, F normiert, $S : E \times F \to \mathbb{K}$ bilinear (oder sesquilinear) und separatstetig, d.h. $s(\cdot, y) : E \to \mathbb{K}$, $s(x, \cdot) : F \to \mathbb{K}$ sind stetig $\forall\, y \in F$ bzw. $x \in E$.
Zeigen Sie: $\exists\, c \geq 0$ mit

$$|s(x,y)| \leq c\|x\|\ \|y\| \quad \forall\, (x,y) \in E \times F$$

und folgern Sie, dass s stetig ist.

Aufgabe 14 (4 Punkte). Sei E normiert, $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset E$, $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

i) $\exists \eta \in E'$ mit $\eta(x_j) = a_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $\|\eta\| \leq c$.

ii) $\left|\sum_{j=0}^N \lambda_j a_j\right| \leq c \left\|\sum_{j=0}^N \lambda_j x_j\right\|$ für alle $N \in \mathbb{N}$, $\lambda_j \in \mathbb{K}$.

Aufgabe 15 (4 Punkte). Seien E, F Banachräume, $T : E \to F$ linear. Zeigen Sie:
Falls gilt:

$$\text{Für } (x_n) \subset E \text{ mit } x_n \to 0 \text{ folgt, dass } Tx_n \to 0 \text{ schwach}$$

so gilt sogar:

$$\text{Für } (x_n) \subset E \text{ mit } ||x_n|| \to 0 \text{ folgt , dass } ||Tx_n|| \to 0$$

(Hinweis: Satz vom abgeschlossenen Graphen)
Folgern Sie den Satz von Hellinger und Toelpitz: Jeder (symmetrische) Operator T auf einem Hilbertraum H mit $< Tx, y >=< x, Ty > \forall x, y \in H$ ist stetig.