

Übungen zur Funktionalanalysis
– Blatt 6 –
Abgabe Mittwoch, 02.06.2010, 14 Uhr

Aufgabe 20 (5 Punkte). Sei $k \in L^1([-1, 1])$ und

$$K : L^1([0, 1]) \longrightarrow L^1([0, 1])$$
$$K(f)(s) := \int_0^1 k(s-t)f(t)dt$$

Zeigen Sie

- i) K ist ein stetiger Operator auf $L([0,1])$ mit $\|K\| \leq \|k\|_{1,[-1,1]}$
- ii) K ist kompakt
- iii) Für $k(t) := e^t$ gilt: $\forall \lambda \neq 0$ ist

$$\text{Kern}(\lambda \text{Id} - K) \oplus \text{Bild}(\lambda \text{Id} - K) = L^1([0,1]).$$

(Ind i) kann die Messbarkeit von $(s, t) \mapsto k(s-t)f(t)$ vorausgesetzt werden.)

Aufgabe 21 (3 Punkte). Geben Sie ein Beispiel für einen stetigen Operator T auf einem Banachraum E an, für den nur die Kerne (oder nur die Bilder) von T^j stabil werden (d.h. $\text{Kern}T^q = \text{Kern}T^{q+1}$ für ein q , aber $\text{Bild}T^j \neq \text{Bild}T^{j+1}$ für alle j bzw. anders herum).

Aufgabe 22 (4 Punkte). Sei $X = l^\infty$ und $L : l^\infty \longrightarrow l^\infty$ definiert durch $L(c_1, c_2, c_3, \dots) = (c_2, c_3, c_4, \dots)$. Berechnen Sie $\rho(L)$, $\sigma_p(L)$, $\sigma_r(L)$ und $\sigma_c(L)$.
Wie ändert sich das Ergebnis, wenn man L als Operator von l^2 nach l^2 auffasst?