Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher Sommersemester 2010

Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 7 –

Abgabe Mittwoch, 9.6.2010

Aufgabe 23 (4 Punkte). Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $C_b(X)$ der Banachraum $C_b(X) = \{f \in C(X) \mid f \text{ ist beschränkt}\}$ mit der Supremumsnorm sowie M_g der Multiplikationsoperator mit $g \in C_b(X) \setminus \{0\}$,

$$M_g : C_b(X) \to C_b(X), \quad f \mapsto g \cdot f \; .$$

a) Bestimmen Sie $\sigma(M_g)$ und geben Sie Beispiele mit $\sigma_P(M_g) = \emptyset$ bzw. $\sigma_P(M_g) \neq \emptyset$ an.

b) Berechnen Sie den Spektralradius $r(M_g)$.

Aufgabe 24 (4 Punkte). Sei $X = l^\infty$ und $L : l^\infty \to l^\infty$ definiert durch $L(c) = (0, c_1, c_2, \dots)$. Berechnen Sie $\rho(L)$, $\sigma_p(L)$, $\sigma_r(L)$ und $\sigma_c(L)$. Wie ändert sich das Ergebnis, wenn man L als Operator von l^2 nach l^2 auffast.

Aufgabe 25 (4 Punkte). Sei H ein Hilbert-Raum und L ein unitärer Operator ($L^*L = LL^* = Id$). Beweisen Sie, daß $\sigma(L)$ eine Teilmenge von $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

Aufgabe 26 (4 Punkte). Sei $X = C([0,1])$ und $L : X \to X$ definiert durch $Lf(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Berechnen Sie den Spektralradius $r(L)$ des Operators L. Hinweis: es empfiehlt sich, die Formel $r(L) = \lim_{n\to\infty} \|L^n\|^{1/n}$ zu verwenden.