Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher Sommersemester 2010

Übungen zur Funktionalanalysis
– Blatt 8 –
Abgabe Mittwoch, 19.5.2010, 14 Uhr

Aufgabe 27 (3+3* Punkte). Zeigen Sie, dass zu jeder kompakten Teilmenge K von $\mathbb{C}$ ein Banachraum E und ein $T \in \mathscr{L}(E)$ existieren mit $\sigma(T) = K$.
(*) Zeigen Sie dieselbe Aussage für Hilberträume H und $T \in \mathscr{L}(H)$.

Aufgabe 28 (4 Punkte). Sei

$$g : [1, \infty[\to \mathbb{R},\ t \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \mathbf{1}_{[j,j+1[}(t)$$

und $M_g \in \mathscr{L}(L^2([1, \infty[))$ der Multiplikationsoperator, $M_g(h) = g \cdot h$. Zeigen Sie:

a) $\sigma_p(M_g) = \left\{ \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ und $\sigma(M_g) = \overline{\sigma_p(M_g)}$.

b) Ist $f \in C(\sigma(M_g))$, so ist $f(M_g) = M_{f\circ g}$.

c) Ist M_g kompakt?

Aufgabe 29 (5 Punkte). Seien H ein Hilbertraum, $T \in \mathscr{L}(H)$ ein kompakter, selbstadjungierter Operator. Zeigen Sie:

a) Ist T positiv (semidefinit), d.h.

$$\langle Tx|x\rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in H\,,$$

so gibt es einen kompakten, selbstadjungierten, positiven Operator S mit

$$S^2 = T\,.$$

b) Ist $(y_j)_{j\in J}$ eine ONB von H aus EV von T zu EW λ_j, so ist durch

$$x \mapsto \sum_{j\in J} e^{i\,\lambda_j} \langle x|y_j\rangle\, y_j$$

ein unitürer Operator $U \in \mathscr{L}(H)$ definiert.

Aufgabe 30 (3 Punkte).

Zeigen Sie: Ein Operator T auf einem komplexen Hilbertraum H ist genau dann selbstadjungiert, wenn $< Tx|x >$ reel ist für alle $x \in H$.
Hinweis: Betrachte $< T(x + ay)|x + ay > \forall a \in \mathbb{C}$.