Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher

Sommersemester 2010

Übungen zur Funktionalanalysis
– Blatt 9 –
Abgabe Mittwoch, 23.6.2010

Aufgabe 31 (3 Punkte). Sei H ein unendliche Hilbert-Raum. Ist $T : H \to H$ kompakt, so gilt $0 \in \sigma(T)$.

Aufgabe 32 (4 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}$, n ungerade und ≥ 2, . Zeigen Sie, daß jeder selbstadjungierte kompakte Operator T in einem komplexen Hilbert-Raum genau eine selbstadjungdierte kompakte n-te Wurzel hat, deren Eigenwerte alle in $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \arg z \leq 2\pi/n\}$ liegen. Beweisen Sie, daß jeder nichtnegative selbstadjungierte kompakte Operator L ($\langle Lx, x\rangle \geq 0$), genau eine nichtnegative kompakte n-te Wurzel hat.

Aufgabe 33 (4 Punkte). Seien H_1, H_2 Hilbert-Raüme. Ist T ein kompakter Operator, so ist T^*T kompakt selbstadjungiert und nichtnegativ. Wir definieren den Betrag von T durch $|T| = (T^*T)^{1/2}$ wobei $(T^*T)^{1/2}$ die eindeutig bestimmte nichtnegative Wurzel von T^*T ist. Sei nun $T : H \to H$ kompakt. Zeigen Sie:

1. Es gilt $\||T|x\| = \|Tx\|$, für $x \in H$.
2. Es gibt einen isometrischen Operator $L : \overline{R(|T|)} \to \overline{R(T)}$ mit $T = L|T|$ (die Darstellung $T = L|T|$ heißt die polare Zerlegung von T).

Aufgabe 34 (2 Punkte). Konstruieren Sie einen kompakten Operator, der keine Eigenwerte hat.

Aufgabe 35 (3 Punkte). Betrachten Sie den Multiplikationsoperator $M_v : C[0,1] \to C[0,1]$, mit $v(t) = t$, das heißt $f(t) \mapsto v(t)f(t) = tf(t)$. Zeigen Sie, daß M_v nicht kompakt ist.