Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher Sommersemester 2010

Übungen zur Funktionalanalysis
– Blatt 10 –
Abgabe Mittwoch, 30.6.2010, 14 Uhr

Aufgabe 36 (4 Punkte). Sei H ein separabler Hilbert-Raum, L ein kompakter, selbstadjungierter Operator auf H.
Zeigen Sie: L hat ein endlich-dimensionales Bild genau dann, wenn L endlich-viele Eigenwerte hat.

Aufgabe 37 (4 Punkte). Wir betrachten das Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}^k$ so wie den Hilbert-Raum $L^2(\mathbb{R}^k)$. Sei $k \in L^2(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$. Der dazu gehörige Integraloperator

$$L : L^2(\mathbb{R}^k) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^k) \text{ mit } Lf := \int_{\mathbb{R}^k} k(.,x)f(x)dx$$

ist nach der Vorlesung ein stetiger Operator.
Zeigen Sie:L ist kompakt.

Aufgabe 38 (4 Punkte). Sei T ein kompakter und stetiger Operator auf einem Hilbert-Raum H und $s_j \geq 0$ dessen Singulärwerte (Eigenwerte des Operators $|T|$). Dann existieren Orthonormalfolgen (f_j) unf (g_j) in H, so daß

$$|T|f = \sum_j s_j < f, f_j > f_j$$

$$Tf = \sum_j s_j < f, f_j > g_j$$

$$T^*f = \sum_j s_j < f, g_j > f_j$$

Hinweis: Beachte Aufgabe 33.

Aufgabe 39 (3 Punkte). Sei T ein kompakter, stetiger Operator auf einem Hilbert-Raum H.
Zeigen Sie: Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es einen endlich-dimensionalen Unterraum M_ϵ von H, so daß $||Tx|| \leq \epsilon||x||$ für alle x im orthogonalen Komplement von M_ϵ.