Fachbereich Mathematik und Informatik Sommersemester 2010
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher

Übungen zur Funktionalanalysis
– Blatt 11 –
Abgabe Mittwoch, 7.07.2010

Aufgabe 40 (8 Punkte). Seien H_1 und H_2 Hilbert-Räume. Ein beschränkter Operator $T : H_1 \to H_2$, für den eine Orthonormalbasis $\{e_i\}_{i\in I}$ von H_1 existiert mit $\sum_{i\in I} \|Te_i\|^2 < \infty$, heißt ein Hilbert-Schmidt-Operator. Zeigen Sie:

1. Ein beschränkter Operator T ist genau dann Hilbert-Schmidt-Operator wenn T^* ein Hilbert-Schmidt-Operator ist.
2. Es gilt dann für beliebige Orthonormalbasen $\{f_j\}_{j\in J}$ von H_1 und $\{f'_i\}_{i\in I}$ von H_2
$$\|T\| \leq \left(\sum_{j\in J} \|Tf_j\|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i\in I} \|T^* f'_i\|^2 \right)^{1/2} < \infty$$
3. Ein Hilbert-Schmidt-Operator ist kompakt.
4. Die Menge von Hilbert-Schmidt-Operatoren ist ein zweiseitiges Ideal vom Ring der beschränkten Operatoren.

Aufgabe 41 (3 Punkte). Seien H ein Hilbert-Raum, $\{e_n\}$ ein ONB und $T : H \to H$ beschränkt und linear, definiert durch
$$T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_i \rangle}{i} e_{i+1}$$
Zeigen Sie daß T ein kompakter Operator ist, der keine Eigenwerte $\lambda \neq 0$ hat.

Aufgabe 42 (4 Punkte). Sei $T : l^2 \to l^2$, definiert durch $y = (y_i) = T(x)$, mit $x = (x_i)$ und $y_{2k} = x_{2k}$, $y_{2k-1} = 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Sei $A_\lambda := \lambda Id - T$. Bestimmen Sie für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ die Unterraüme $Kern(A_\lambda^n)$, $n \geq 1$. Ist T kompakt?