Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher

Sommersemester 2010

Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 12 –

Abgabe Mittwoch, 14.7.2010, 14 Uhr

Aufgabe 43 (4 Punkte). Sei $X = l^\infty$ und $L, R : l^\infty \longrightarrow l^\infty$ definiert durch $L(c_1, c_2, , c_3, ...) = (c_2, c_3, c_4, ...)$ und $R(c_1, c_2, , c_3, ...) = (0, c_1, c_2, ...)$.
Zeigen Sie, dass L und R Fredholmoperatoren sind und berechnen Sie jeweils den Index. (Vgl. z.B. Aufgabe 22)

Aufgabe 44 (4 Punkte). Sein $T : H \longrightarrow H$ ein stetiger, selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum H, $t \in \mathbb{R}$. Sei $f_t(T) := \int_{\sigma(T)} e^{it\lambda} dE(\lambda)$, $\lambda \in \sigma(T)$.
Zeigen Sie: Der Operator $f_t(T)$ ist unitär.

Aufgabe 45 (4 Punkte). Sei $S \in \mathscr{L}(H)$ selbstadjungiert. Zeigen Sie:

a) Ist $f, g \in C(\sigma(S))$ mit $f \cdot g = 0$, so ist Bild $f(S) \perp$ Bild $g(S)$.

b) Ist $\sigma(S) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ mit σ_1, σ_2 abgeschlossen, disjunkt, $\neq \emptyset$, so existieren reduzierende Untervektorräume M_1, M_2 von S mit $H = M_1 \oplus M_2$, $M_1 \perp M_2$.

Bem.: Eine Zerlegung $H = M_1 \oplus M_2$ heißt reduzierend, bzgl. S, falls $S(M_i) \subset M_i$ für $i = 1, 2$ gilt.