

Übungen zur Mathematischen Logik

– Blatt 4 –

Abgabe Donnerstag, 15.11.2012 vor der Vorlesung

Aufgabe 12 (4 Punkte). Sei $U = \overline{\mathcal{P}}^{\mathcal{J}}$ die Peano-Algebra aller Formeln (in der Junktoren-Logik). Konstruiere mit Hilfe des Rekursionssatzes Abbildungen $\phi : U \rightarrow \mathbf{N}$ und $\psi : U \rightarrow \mathbf{N}$ mit der folgenden Eigenschaft:

- a) $\phi(A)$ zählt die Anzahl der Primformeln in einer Formel A .
- b) $\psi(A)$ zählt die Anzahl der Symbole \wedge und \vee in einer Formel A .

Aufgabe 13 (4 Punkte). Zeige, dass die folgenden Formeln

- a) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- b) $(A \wedge B) \rightarrow A$
- c) $B \rightarrow (A \vee B)$
- d) $B \rightarrow (A \vee \overline{A})$

Tautologien sind auf zweierlei Weise: (i) durch Anwendung des "Vergleichs-Lemmas" und (ii) durch direkte Berechnung der Wahrheitsfunktion. Schreibe diese Formeln auch jeweils (i) in polnischer Schreibweise, (ii) durch Ableitungsbaum.

Aufgabe 14 (8 Punkte). Zeige durch Anwendung des "Vergleichs-Lemmas", dass die folgenden Formeln Tautologien sind:

- a) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- b) $(C \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow (A \wedge B)))$
- c) $((A \vee C) \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee C)$
- d) $((A \vee B) \wedge C) \rightarrow ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))$

Schreibe diese Formeln auch jeweils (i) in polnischer Schreibweise, (ii) durch Ableitungsbaum.