

Übungen zur Mathematischen Logik

– Blatt 5 –

Abgabe Donnerstag, 22.11.2012 vor der Vorlesung

Aufgabe 15 (4 Punkte). Seien A, B Formeln. Konstruiere analog der Vorlesung eine Ableitung von $\frac{A \vee B}{B \vee A}$ mit Begründung aller Beweisschritte.

Aufgabe 16 (4 Punkte). Sei A eine Formel. Konstruiere analog der Vorlesung eine Ableitung von $\frac{\overline{\overline{A}}}{A}$ mit Begründung aller Beweisschritte.

Aufgabe 17 (4 Punkte). Sei $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, P_2, \dots\}$ eine abzählbare Menge von Primformeln. Ist die Menge

$$\mathcal{A} = \{P_0 \vee P_1, \overline{P_1} \vee \overline{P_2}, P_2 \vee P_3, \overline{P_3} \vee \overline{P_4}, \dots\}$$

erfüllbar, d.h. existiert eine W-Funktion $\tau : \mathcal{P} \rightarrow 2$ mit $\hat{\tau}(A) = 1$ für jede Formel $A \in \mathcal{A}$? Gebe eine Begründung an.

Aufgabe 18 (4 Punkte). Seien A und B Boolesche Algebren: Betrachte auf $A \times B$ die Produkt-Ordnung

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leq a_2 \text{ und } b_1 \leq b_2$$

Zeige, dass $A \times B$ ebenfalls eine Boolesche Algebra ist. Genauer:

- Verifiziere die drei Ordnungsaxiome.
- Finde Kandidaten für Supremum $(a_1, b_1) \wedge (a_2, b_2)$ und Infimum $(a_1, b_1) \vee (a_2, b_2)$ und zeige die Supremum-bzw. Infimum-Eigenschaft.
- Beweise die Distributiv-Gesetze.
- Finde Kandidaten für das kleinste bzw. grösste Element in $A \times B$ sowie für die Negation, und beweise die entsprechenden Gesetze.

Alle diese Fragen betreffen Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.