Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Harald Upmeier
Dr. Octavio Paniagua
Sascha Henzgen

Wintersemester 2012/2013

Übungen zur Mathematischen Logik

– Blatt 6 –

Abgabe Donnerstag, 29.11.2012 vor der Vorlesung

Aufgabe 19 (4 Punkte). Sei A eine Boole'sche Algebra und $a, b \in A$

a) Beweise die Aussagen

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$$
$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$$

aufgrund der in der Vorlesung bewiesenen Eindeutigkeit der Negation, d.h. es ist zu zeigen, dass die jeweils rechten Seiten die beiden Bedingungen der Negation für die linke Seite erfüllen. Hinweis: Distributivität wird mehrfach benutzt.

b) Zeige, dass die beiden obigen Beziehungen äquivalent sind, d.h. jede folgt aus der anderen durch geeignete Anwendung der bewiesenen Formel $a = \overline{\overline{a}}$.

Aufgabe 20 (4 Punkte). Sei X eine Menge mit mindestens zwei Elementen und $A = 2^X$ die Boole'sche Algebra aller Funktionen auf X mit Werten $0, 1$. Die Ordnung sei

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in X : f(x) \leq g(x)$$

a) Bestimme das Supremum $f \vee g$ und das Infimum $f \wedge g$ zweier Funktionen in $f, g \in A$

b) Bestimme das kleinste Element $o \in A$ und das grösste Element $e \in A$

c) Bestimme die Negation $f \mapsto \overline{f}$

d) Zeige durch explizite Rechnung die Beziehungen $f \vee \overline{f} = e$ und $f \wedge \overline{f} = o$

Die anderen Eigenschaften einer Boole'schen Algebra brauchen nicht verifiziert zu werden.

Aufgabe 21 (4 Punkte). Sei $x_0 \in X$ fest und definiere für $A = 2^X$

$$\mathcal{I} := \{f \in A : f(x_0) = 0\}$$

Beweise:

a) $\mathcal{I}$ ist ein Ideal in A.

b) Es gilt $e \notin \mathcal{I}$.

c) $\mathcal{I}$ ist ein maximales Ideal in A.

Aufgabe 22 (4 Punkte). Sei $Y = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine endliche Teilmenge von X. Für jedes $1 \leq i \leq n$ definiere eine Funktion $f_i : X \to 2$ durch

$$f_i(x_i) := 1, \; f_i(x) = 0 \quad \forall x \neq x_i$$

a) Bestimme das von diesen Funktionen erzeugte Ideal $\mathcal{I} =< f_1, \ldots, f_n >$, d.h. beschreibe die Bedingung $f \in \mathcal{I}$ direkt durch eine Eigenschaft von f

b) Wähle als Beispiel $X = \mathbf{R}$ und endlich viele Punkte x_i auf der reellen Achse. Zeichne den Graphen von f_i. Ist f_i stetig?