Übungen zur Mathematischen Logik

– Blatt 8 –

Abgabe Donnerstag, 13.12.2012 vor der Vorlesung

Aufgabe 27 (4 Punkte). Sei A eine Boole'sche Algebra und $\mathcal{M} \subset A$ ein Ideal mit der Eigenschaft:

$$a \in A \Rightarrow a \in \mathcal{M} \text{ oder } \bar{a} \in \mathcal{M}$$

Zeige: $\mathcal{M}$ ist ein maximales Ideal.

Hinweis: Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{I} \subset A$ ein Ideal mit $\mathcal{M} \neq \mathcal{I}$. Zeige, dass dann $e \in \mathcal{I}$ gilt, also $\mathcal{I} = A$.

Aufgabe 28 (4 Punkte). Welche der folgenden Zeichenreihen sind Terme bzw. Formeln? Gebe jeweils eine Begründung an.

a) $= +xy < uv$

b) $\cdot ux + yz$

c) $\neg = xyx$

Dabei seien x, y, z, u, v Zahlen-Variablen.

d) $= \cup \cap XYXX$

e) $\in X \cup YZ$

f) $\emptyset = \emptyset \cap \emptyset$

Dabei seien X, Y, Z Mengen-Variablen.

Aufgabe 29 (4 Punkte). Betrachte Mengen mit Prädikatsymbolen $\mathcal{P}_2 = \{\subset, \in, =\}$. Schreibe die nachstehenden "naiven" Formeln in polnischer Schreibweise und bestimme die (freie) Trägermenge:

a) $X \subset Y \Leftrightarrow (\text{für alle } Z \text{ gilt : } Z \in X \Rightarrow Z \in Y)$

b) $X \cap Y = \emptyset \Leftrightarrow (\text{für alle } Z \text{ gilt : } Z \in X \Rightarrow Z \notin Y)$

Beachte: $\notin$ ist kein Prädikatsymbol, sondern muss anders ausgedrückt werden.

Aufgabe 30 (4 Punkte). Definiere rekursiv eine Abbildung

$$(\mathcal{PT})^{\mathcal{J} \cup \mathcal{Q}} \rightarrow \{0, 1\}, A \mapsto [A]$$

mit der folgenden Eigenschaft:

$[A] = 0$ falls A eine gerade Anzahl von Junktoren und Quantoren enthält

$[A] = 1$ falls A eine ungerade Anzahl von Junktoren und Quantoren enthält