Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Harald Upmeier
Dr. Octavio Paniagua
Sascha Henzgen

Wintersemester 2012/2013

Übungen zur Mathematischen Logik
– Blatt 9 –
Abgabe Donnerstag, 20.12.2012 vor der Vorlesung

Für eine Boole'sche Algebra A und eine beliebige Teilmenge $B \subset A$ bezeichne $sup(B) \in A$ das Supremum in A, falls es existiert. Analog für das Infimum.

Aufgabe 31 (4 Punkte). Sei $A = \mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge einer festen Menge M mit der Inklusions-Ordnung.

a) Für eine Familie $X_i \subset M$, indiziert über eine beliebige Indexmenge I, beschreibe

$$\sup_{i \in I} X_i$$

und

$$\inf_{i \in I} X_i$$

explizit als Teilmengen von M.

b) Finde eine absteigende Folge $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots$ nicht-leerer Teilmengen von $M = \mathbf{N}$ sodass

$$\inf_{n \in \mathbf{N}} X_n = \emptyset$$

Aufgabe 32 (4 Punkte). Sei M eine *endliche* Menge und $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots$ eine absteigende Folge nicht-leerer Teilmengen von M. Beweise:

$$\inf_{n \in \mathbf{N}} X_n \neq \emptyset$$

Aufgabe 33 (4 Punkte). Betrachte das Zahlen-Modell $U = \mathbf{N}$ mit den Operationen

$$s_0^* = 0,\ s_2^*(m,n) = m + n,\ \tilde{s}_2^*(m,n) = m^n$$

und die Terme

$$t = \tilde{s}_2 x_1 s_2 s_0 x_7$$

$$t' = \tilde{s}_2 x_7 s_2 s_0 x_1$$

$$t'' = \tilde{s}_2 s_2 x_1 x_7 s_0$$

a) Bestimme die Term-Fortsetzung für jede Belegungs-Folge $\alpha_1, \alpha_2, ...$ in $\mathbf{N}$, als Element von $\mathbf{N}$.

b) Was ergibt sich speziell für die Folge

$$\alpha_j = \text{j-te Primzahl}$$

für $j = 1, 2, ..?$

Aufgabe 34 (4 Punkte). Betrachte das Mengen-Modell $U = \mathcal{P}(\mathbf{N})$ mit den Operationen

$$s_0^* = \emptyset,\ \tilde{s}_0^* = \mathbf{N},\ s_1^*(X) = \mathbf{N} \setminus X,\ s_2^*(X,Y) = X \cup Y,\ \tilde{s}_2^*(X,Y) = X \cap Y$$

Betrachte die Terme

$$t = \tilde{s}_2 x_1 s_2 x_2 \tilde{s}_2 x_7 s_1 x_9$$

$$t' = \tilde{s}_2 s_1 s_0 s_2 x_2 \tilde{s}_2 x_7 x_9$$

a) Bestimme die Term-Fortsetzung für jede Belegungs-Folge $\alpha_1, \alpha_2, ...$ von Teilmengen von $\mathbf{N}$, als Teilmenge von $\mathbf{N}$.

b) Was ergibt sich speziell für die Folge

$$\alpha_j = \{0, 1.., j - 1\} = \{n \in \mathbf{N} : n < j\}$$

für $j = 1, 2, ..?$

c) Was ergibt sich speziell für die Folge

$$\alpha_j = \{j, j + 1, j + 2, j + 3, ...\} = \{n \in \mathbf{N} : n \geq j\}$$

für $j = 1, 2, ..?$