

Übungen zur Mathematischen Logik
 – Blatt 13 –
 Abgabe Donnerstag, 7.02.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 42 (4 Punkte). Sei $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbf{N})$ die Boolesche Algebra aller Teilmengen von $\mathbf{N}$.

a) Konstruiere das Supremum $\bigvee_n X_n$ bzw. Infimum $\bigwedge_n X_n$ einer abzählbaren Familie von Teilmengen $X_n \subset \mathbf{N}$

b) Beweise die Formel

$$\mathbf{N} \setminus \bigvee_n X_n = \bigwedge_n (\mathbf{N} \setminus X_n)$$

Aufgabe 43 (4 Punkte). Sei $n_0 \in \mathbf{N}$ fest und definiere $\chi : \mathcal{A} \rightarrow 2$ durch

$$\chi(X) := \begin{cases} 1 & n_0 \in X \\ 0 & n_0 \notin X \end{cases}$$

a) Zeige, dass χ ein Charakter ist, und beweise die Relation

$$\chi \bigvee_{n=0}^N X_n = \bigvee_{n=0}^N \chi(X_n)$$

(und die analoge Relation für $\bigwedge$) durch direkte Verifizierung, d.h. ohne Rückführung auf $N = 2$

b) Gelten diese Relationen auch für abzählbare Familien?

Aufgabe 44 (8 Punkte). Für Formeln A und Terme t ist die Formel

$$\frac{\bigwedge_x A}{\iota_x^t \circ A}$$

als 0-stellige Regel eine Tautologie, wie in der Vorlesung bewiesen.

a) Zeige durch eine geeignete Modell-Belegung, dass die umgekehrte Formel

$$B := \frac{\iota_x^t \circ A}{\bigwedge_x A}$$

keine Tautologie ist.

b) Zeige, dass B dennoch erfüllbar ist, d.h. es existieren Belegungen α mit $\alpha \wedge B = 1$