Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Harald Upmeier
Dr. Octavio Paniagua
Sascha Henzgen

Wintersemester 2012/2013

Mathematische Logik Klausur-Vorbereitung I

Aufgabe 1. Betrachte das Mengenmodell $\mathcal{U} =$ älle Mengen", mit den beiden Prädikats-Symbolen $p_2^* =$ " $=$ " (Gleichheit) und $p_2^{**} = \in$ (Elementbeziehung) in $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$. In diesem Modell sind "Elemente" selbst wieder Mengen.

a) Zwei Mengen X, Y sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente besitzen, d.h. jedes Element von X ist Element von Y und umgekehrt. Schreibe diese Aussage im Mengenmodell in naiver Schreibweise und polnischer Notation.
Behandle analog die Mengenbeziehungen

b) X und Y sind disjunkt,

c) X ist keine Teilmenge von Y.

Aufgabe 2. Betrachte das Zahlenmodell $\mathcal{U} = \mathbf{N}$ mit den beiden Prädikats-Symbolen $p_2^* =$ " $=$ " (Gleichheit) und $p_2^{**} =$ " $<$ " (Kleiner-Beziehung) in $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, und den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ sowie der 1-stelligen Operation $s_1^* n = n + 1$ (Nachfolge-Operation) und $s_0^* = 0$.

a) Betrachte die Aussage: Eine natürliche Zahl $n \in \mathbf{N}$ welche nicht grösser ist als irgendeine Zahl $m \in \mathbf{N}$, muss $= 0$ sein. Schreibe diese Aussage in naiver und polnischer Notation.

b) Für $m, n \in \mathbf{N}$ gilt: $m \neq n$ genau dann, wenn $m < n$ oder $m > n$. Schreibe diese Aussage in naiver und polnischer Notation. Hinweis: Man hat nur " $=$ " und " $<$ " zur Verfügung

Aufgabe 3. Betrachte die Formel $A = \bigwedge_x \bigwedge_y (p_2 xy) \vee (p_2^{\sim} xy) \vee (p_2^{\sim} yx)$

a) Schreibe A in polnischer Schreibweise

b) Betrachte das Zahlenmodell $\mathcal{U} = \mathbf{N}$ und zeige, dass für jede Belegung $\alpha : X \to \mathbf{N}$ gilt:

$$\alpha^\wedge(A) = 1$$

c) Betrachte das Mengenmodell $\mathcal{U} = \mathcal{P}(\mathbf{N})$ und zeige, dass es eine Belegung $\alpha : X \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$ gibt mit

$$\alpha^\wedge(A) = 0$$

d) Betrachte das Mengenmodell $\mathcal{U} = \mathcal{P}(\mathbf{N})$ und zeige, dass es eine andere Belegung $\beta : X \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$ gibt mit

$$\beta^\wedge(A) = 1$$

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{U} = \mathbf{N}$ eine Funktional-Algebra mit $s_0 = 0$, $s_1 n = n + 2$ und $s_1^{\sim} n = 2n$.

a) Bestimme alle ableitbaren Elemente in $\mathcal{U}$

b) Gebe für jedes ableitbare Element eine möglichst kurze Ableitung an.

Aufgabe 5. Sei $\mathcal{U} = \{X \subset \mathbf{N} : X \neq \emptyset\}$ eine Relational-Algebra mit 0-stelligen Regeln

$$\{n, n+1\}$$

für $n \in \mathbf{N}$, d.h. alle Zweiermengen mit aufeinanderfolgenden Zahlen, sowie einer 1-stelligen Operation $X \mapsto X'$ auf $\mathcal{U}$, definiert durch

$$X' := (X \setminus (kleinstes\, Element\, von\, X)) \cup (kleinstes\, Element\, von\, \mathbf{N} \setminus X)$$

d.h. X' entsteht aus X, indem das kleinste Element von X ersetzt wird durch das kleinste Element des Komplements $\mathbf{N} \setminus X$.

a) Zeige durch Induktions-Satz: Die ableitbaren Elemente in $\mathcal{U}$ haben jeweils zwei Elemente.

b) Zeige, dass alle zwei-elementigen Mengen ableitbar sind.

Aufgabe 6. Sei A eine Formel. Ein grosses Modell $(\mathcal{U}, \mathcal{S}^*, \mathcal{P}^*)$ heisst ein korrektes A-Modell, falls für jede Belegung $\alpha : X \to \mathcal{U}$ gilt

$$\alpha^\wedge A = 1.$$

Beweise, dass das Modell $(\mathbf{N}, 0_\mathbf{N}, S_\mathbf{N}, <_\mathbf{N}, =_\mathbf{N})$ ein korrektes Modell für die Formel

$$A = \bigwedge x < 0Sx$$

ist. Hierbei sei S die 1-stellige Nachfolge-Operation.

Aufgabe 7. Bestimme die Substitution $\gamma \circ A$ im Zahlenmodell, wobei

$$\gamma = \iota_{x_1}^{+x_0x_1}$$

$$A = (\bigwedge_{x_0} \bigvee_{x_2} = \cdot \cdot \, x_0x_1x_2 0)$$

Zeige zunächst, dass dies eine korrekte Formel ist.