Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher

Wintersemester 2010

# Übungen zur Partielle Differentialgleichungen

– Blatt 1 –

Abgabe Mittwoch, 27.10.2010

Sei im Folgenden die folgende Notation verwendet: $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ usw.

**Aufgabe 1** (Einseitig unendlich schwingende Seite: 4 Punkte).

Eine in positive $x$-Richtung unendlich lang schwingende Seite wird modelliert durch die eindimensionale Wellengleichung:

$$\partial_{tt} u = c^2 \partial_{xx} u \quad \text{mit: } u \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$$

Neben den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = u_0(x) \in C^2(\mathbb{R}_+), \quad \partial_t u(x,0) = u_1(x) \in C^1(\mathbb{R}_+)$$

muss man auch noch eine Randbedingung stellen, die das Verhalten der "Wand" bei $x = 0$ für alle Zeiten t beschreibt:

$$u(0,t) = \phi(t) \in C^2(\mathbb{R}_+).$$

Welche Verträglichkeistbedingungen müssen dann zwischen $u_0, u_1$ und $\phi$ gelten, damit eine Lösung mit diesen Rand- und Anfangsbedingungen existieren kann?

Man zeige, dass eine Lösung durch

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)ds & \text{für: } x > ct \\ \frac{1}{2}[u_0(x+ct) - u_0(ct-x)] + \phi(t-\frac{x}{c})\frac{1}{2c}\int\limits_{ct-x}^{x+ct} u_1(s)ds & \text{für: } x \le ct \end{cases}$$

gegeben ist und interpretiere die einzelnen Terme. Welche Rolle spielt der sogenannte "Lichtkegel" (alle Punkte mit $x \le ct$)?

**Aufgabe 2** (Beidseitig eingespannte schwingende Seite: 4 Punkte).

Für die Wellengleichung auf beschränkten Gebieten hat sich ein auf Bernoulli zurückgehender Separationsansatz bewährt, der das Problem auf die Theorie der Fourier Reihen reduziert. Gesucht ist eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung auf dem Intervall $[0,1]$:

$$\partial_{tt} u = c^2 \partial_{xx} u, \quad u \in C^2([0,1] \times \mathbb{R}_+)$$

Es sollen Anfangs- und Randbedingungen

$$u(x,0) = u_0(x) \in C^2([0,1]), \quad \partial_t u(x,0) = u_1(x) \in C^1([0,1]), \quad u(0,t) = u(1,t) = 0$$

gelten.

Wir machen den Ansatz

$$u(x,t) = T(t)X(x), \quad T(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad X(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

a) Man zeige, dass eine Konstante $\lambda$ existiert mit der

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = \lambda$$

gilt.

b) Man zeige, dass die Fälle $\lambda = 0$ und $\lambda > 0$ notwendig auf die triviale Lösung $u = 0$ führen. Sei deswegen fortan $\lambda = -k^2$

c) Man zeige, dass in diesem verbleibenden Fall die Lösung durch

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = \sin(k\pi x)\left[a_k \sin(k\pi ct) + b_k \cos(k\pi ct)\right]$$

gegeben ist. Welche kann $k$ annehmen? Wie lassen sich die Koeffizienten $a_k$ und $b_k$ aus den Anfangsbedingungen berechnen?

**Aufgabe 3** (Elektrische Felder symmetrischer Ladungsverteilungen: 4 Punkte).

Oft erleichtern Symmetrien das Lösen von Differentialgleichungen enorm. Dies sei am Besipiel der Elektrostatik verdeutlicht:

a) Sei $O(3)$ die Menge der orthogonalen $3\times 3$ Matrizen und $G \subset O(3)$ eine Untergruppe. Eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ heißt dann symmetrisch bezüglich der Symmetriegruppe $G$ falls für alle $g \in G$ gilt:

$$\rho(g\vec{r}) = \rho(\vec{r})$$

Man zeige, dass für das eindeutige elektrische Potential $\phi$ einer solchen symmetrischen Ladungsverteilung, welches im Unendlichen konstant wird, gilt:

$$\phi(g\vec{r}) = \phi(\vec{r}) \text{ für alle } g \in G$$

b) Sei $\rho(\vec{r})$ eine glatte Ladungsverteilung mit kompaktem Träger, die kugelsymmetrisch, d.h. symmetrisch bezüglich $SO(3)$ ist. Man zeige, dass dann außerhalb des Trägers von $\rho$ für das elektrische Feld gilt:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \cdot \frac{\int \rho(\vec{r})d\vec{r}}{\|\vec{r}\|^2}$$

Hinweise:

- Man zeigen zuerst, dass $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} E(\|r\|)$ und nutze dann den Integralsatz von Gauß für das elektrische Feld.