Fachbereich Mathematik und Informatik — Wintersemester 2010
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher

Übungen zur Partielle Differentialgleichungen
– Blatt 2 –
Abgabe Mittwoch, 03.11.2010

Aufgabe 4 (3 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}^*$, $c \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Geben Sie eine explizite Formel für eine Funktion $u(x,t)$, Lösung des Cauchy-Problems

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u + b \cdot Du + cu = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \ \{0\} \end{cases}$$

wobei $g = g(x)$ eine stetige Funktion ist.

Aufgabe 5 (3 Punkte). Beweisen Sie daß, die Laplace-Gleichung Rotation-invariant in $\mathbb{R}^n$ ist, d.h., wenn $u(x)$

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n$$

erfüllt und $A \in O(n)$ ist eine orthogonale Matrix, dann gilt für $v(x) := u(Ax)$

$$\Delta v(x) = 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n$$

Aufgabe 6 (3 Punkte). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Ein Element $v \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ wird *subharmonisch* gennant wenn

$$-\Delta v(x) \leq 0 \quad \text{auf } \Omega \text{ gilt.}$$

a) Zeigen Sie daß, eine subharmonische Funktion $v(x)$ erfüllt

$$v(x) \leq \int_{K(x,r)} v(y)dy,$$

wobei $x \in \Omega$ ein beliebiger Punkt ist, und $K(x,r) \subset \Omega$.

b) Zeigen Sie daß, für eine subharmonische Funktion $v(x)$ gilt:

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} v(x) = \max_{y \in \partial\Omega} v(y)$$

c) Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte konvexe Funktion. Sei u harmonische in Ω. Zeigen Sie daß, $v := \phi \circ u$ eine subharmonische Funktion auf Ω ist.

Aufgabe 7 (4 Punkte). Sei $O = (0,0)$, $A = (1,0)$, $B = (1,1)$ und $C = (0,1)$. Wir bezeichnen mit Q das Karree $[OABC]$ und mit T das Dreieck $[OCB]$. Angenommen wir daß, $u(x,y)$ eine Lösung des Dirichlet-Problem ist

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x,y) \in Q \\ u(x,0) = -f(x) = -u(x,1), & x \in [-1,1] \\ u(0,y) = f(y) = -u(1,y), & y \in [-1,1] \end{cases}$$

wobei f stetig ist, mit $f(0) = f(1) = 0$.

1. Zeigen Sie daß, die Funktion $v(x,y) := u(y,x)$ auf Q erfüllt $\Delta v = 0$.
2. Finden Sie die Randbedingungen, die die Funktion $v(x,y)$ erfüllt.
3. Beweisen Sie daß, für alle $(x,y) \in Q$, $u(x,y) = -v(x,y)$ gilt.