Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher

Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 1 –

Abgabe Mittwoch, 10.11.2010

Aufgabe 1 (Schrödingergleichung: 3 Punkte). Die Schrödinger Gleichung

$$i\hbar\partial_t\Psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x,t)\right]\Psi(x,t) \quad \Psi \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$$

beschreibt die zeitliche Entwicklung eines quantenmechnischen Teilchens in einem Potential $V(x,t)$. Das Betragsquadrat $|\Psi(x,t)|^2$ der Wellenfunktion gibt dabei die Wahrscheinlichkeit an, das Teilchen zum Zeitpunkt t am Ort x anutreffen.

Unter welcher Voraussetzung an das Potential $V(x,t)$ ist ein Separationsansatz der Form: $\Psi(x,t) = \phi(x)\theta(t)$ erfolgreich? Welche Eigenwertgleichung ist nach einem solchen Ansatz noch zu lösen? Welche Eigenwerte sind erlaubt, wenn man möchte, dass eine Anfangs auf 1 normierte Wahrscheinlichkeit das Teilchen irgendwo zu finden

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\Psi(x,0)| = 1$$

für alle zeiten auf 1 normiert bleibt?

Aufgabe 2 (Quantenbillards: 5 Punkte). Ein in der Physik viel studiertes Modell sind sogenannte zweidimensionale Quantenbillards, oder Teilchen in unendlich hohen Potentialtöpfen: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte zusammenhängede Teilmenge, so möchte man Teilchen in einem idealisierten Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \Omega \\ \infty & \text{falls } x \notin \Omega \end{cases}$$

betrachten. Die physikalische Forderung nach unendlich hohem Potential schlägt sich darin nieder, dass die Wellenfunktion am Rand von Ω (und außerhalb) verschwindet. Man studiert also die stationöre Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(x) = E\Psi(x) \quad \Psi \in C^2(\Omega),\ \|\Psi\|_{L^2} = 1 \text{ und } \Psi(x) = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega.$$

a) Man zeigen Sie, dass es keine Lösung mit $E = 0$ gibt. Wir verwenden im Folgenden sogar ohne Beweis, dass $E > 0$.

b) Sei ab jetzt $\Omega = [0,a] \times [0,b]$. Man löse mittels eines Separationsansatzes die stationäre Schrödingergleichung. Welche Werte kann E annehmen?

Wir betrachten nun wieder die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar\partial_t\Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(x,t), \quad \Psi \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}), \quad \Psi(x,t) = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega$$

c) Wie lautet die Zeitentwicklung einer Lösung der stationären Schrödingergleichung?

d) Sei $\Psi_0 \in C^2(\Omega)$. Wie lautet die Lösung der Schrödingergleichung mit $\Psi(x,0) = \Psi_0(x)$.

Aufgabe 3 (inhomogene Wellengleichung: 5 Punkte). Wir betrachten die inhomogene Wellengleichung auf dem eindimensionalen Intervall $[0,1]$:

$$\partial_{tt} u = c^2 \partial_{xx} u + f(x,t) \quad u \in C^2([0,1] \times \mathbb{R}^+$$

mit Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x,0) = u_1(x)$$

und betrachten zuerst die trivialen Randbedingungen

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

Man zeige, dass der Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(n\pi x)$$

die Randbedingungen erfüllt und zeige, dass die Funktionen $a_n(t)$ eindeutig bestimmt sind. Dazu zeige man, dass sie Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung sind und dass die Anfangswerte $a_n(0)$ und $a_n'(0)$ durch u_0 und u_1 bestimmt sind.

Hinweis: Man beachte die Fourierentwicklung von u_0, u_1 und f.

Man betrachte nun die inhomogene Wellengleichung für zeitabhängige Randbedingungen

$$u(0,t) = \phi_0(t), \quad u(1,t) = \phi_1(t)$$

Man zeige, dass die Lösung dieser Gleichung auf die Lösung einer inhomogenen Wellengleichung mit trivialen Randbedingungen zurückgeführt werden kann.

Hinweis: Man studiere Funktionen $v = u - \Phi$ mit $\Phi(x,t) = (1-x)\phi_0(t) + x\phi_1(t)$