Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher

Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 4 –

Abgabe Mittwoch, 17.11.2010

Im folgenden bezeichne Ω immer eine offene Menge im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 11 (3 Punkte). Man beweise:

1. Die Inklusion $\mathcal{D}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ ist stetig.
2. Die Menge $\mathcal{D}(\Omega)$ liegt dicht in $L^p(\Omega)$.
3. Man konstruiere ein Beispiel einer Funktionenfolge $\phi_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$, die in $L^p(\Omega)$ gegen null konvergiert, aber nicht in $\mathcal{D}(\Omega)$.

Aufgabe 12 (3 Punkte). Man beweise folgenden Sachverhalt aus der Vorlesung: Ist $T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ eine Folge von Distributionen und konvergiert $T_n(\phi)$ für alle $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, so definiert man $T(\phi) := \lim_{n\to\infty} T_n(\phi)$. Dann ist T eine Distribution und es gilt $D^\alpha T_n \to D^\alpha T$.

Hinweis: Benutze den Satz von Banach und Steinhaus.

Aufgabe 13 (3 Punkte). Man beweise:

1. $\mathcal{E}(\Omega)$ ist ein vollständiger, metrischer Raum.
2. $\mathcal{E}(\Omega)$ ist *kein* Banach-Raum, d.h. es existiert keine Norm $\|\cdot\| : \mathcal{E}(\Omega) \to [0,\infty[$, welche den Konvergenzbegriff in $\mathcal{E}(\Omega)$ induziert.

Aufgabe 14 (die Friedrichs-Regularisierung, 3 Punkte). Sei ψ eine nicht-negative Funktion in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit den Eigenschaften

$$\operatorname{supp}(\psi) = B^n(0;1) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 1$$

Ein Beispiel einer solchen Funktion ist die Abbildung $\widetilde{\psi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$

$$\widetilde{\psi} = \begin{cases} \alpha \exp(-\frac{1}{1-\|x\|^2}) & \text{für } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{für } \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

weobei die Konstante $\alpha > 0$ gerade so gewählt wird, daß die Normierungsbedingung für das Integral erfüllt ist. Zu gegebenem $\epsilon > 0$ betrachten wir nun die Funktion $\psi_\epsilon(y) = \epsilon^{-n}\psi(y/\epsilon)$, sowie für eine beliebige Funktion $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$, mit kompaktem Träger $K \subset \Omega$ das *Faltungsintegral*

$$u_\epsilon(x) = (u * \psi_\epsilon)(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \int_\Omega u(z)\psi(\frac{x-z}{\epsilon})dz$$

Man beweise:

1. u_ϵ liegt für hinreichend kleines ϵ in $C_0^\infty(\Omega)$.
2. Ist u zusätzlich stetig, dann konvergiert u_ϵ gleichmäßig gegen u.
3. Es gilt $\|u_\epsilon\|_p \leq \|u\|_p$ und u_ϵ konvergiert für $\epsilon \to 0$ gegen u in $L^p(\Omega)$.