Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher

Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen
– Blatt 5 –
Abgabe Mittwoch, 24.11.2010

Aufgabe 15 (3 Punkte). Man beweise, dass die Distributionenfolge

$$T_n = \frac{\sin(nx)}{x}$$

in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ für $n \to \infty$ schwach gegen $\pi \cdot \delta_0$ konvergiert.

Aufgabe 16 (3 Punkte). Man beweise, dass jede Distribution in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ unendlich viele "Stammfunktionen" besitzt, und dass sich je zwei solche Funktionen nur durch eine Konstanten unterscheiden.

Aufgabe 17 (3 Punkte). Sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ un $f \in C^\infty(\Omega)$ eine glatte Funktion. Man beweise, dass die Distribution $f \cdot T$ kompakten Träger hat, falls f oder T kompakten Träger hat.

Aufgabe 18 (5 Punkte). Man zeige mit dem Satz von Baire, dass $\mathcal{D}(\Omega)$ nicht metrisierbar ist.

a) Dazu beweise man erst eine einfach Form des Satzes von Baire:

   Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(U_n)_{n\in N}$ eine Folge offener und dichter Teilmengen von X, dann ist auch $\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dicht in X.

b) Man folgere:

   Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener nirgends dichter Teilmengen, dann ist $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ nirgends dicht.

c) Man zeige mit b), dass $\mathcal{D}(\Omega)$ nicht metrisierbar ist.