Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher

Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

– Blatt 6 –

Abgabe Mittwoch, 1.12.2010

Aufgabe 19 (4 Punkte). Das Ziel dieser Übung ist, folgenden Satz zu zeigen: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $D_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$. Angenommen u und g sind stetig auf Ω und es gilt $D_j u = g$ im distributionellen Sinn. Dann gilt $D_j u = g$ im klassischen Sinn. Das heißt, $D_j u$ existiert als Funktion und ist gleich g auf Ω.

1. Sei $W \subset \Omega$ eine offene Kugel, $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\chi = 1$ auf W. Beweisen Sie, dass $D(\chi u) = (D\chi)u + \chi(Du)$, als Distributionen. Hinweis: $D^\alpha u(\phi) = (-1)^{\|\alpha\|} u(D^\alpha \phi)$.
2. Seien $v = \chi u$ and $g = D_j v$. Man beweise, dass v und g stetig sind und kompakten Träger haben.
3. Sei $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\phi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)dy = 1$. Für $\epsilon > 0$ definieren wir
$$v_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} v(x - \epsilon y)\phi(y)dy$$
Wir wissen, dass $v_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $v_\epsilon \to v$ gleichmäßig, wenn $\epsilon \to 0$. Beweisen Sie
$$D_j v_\epsilon(x) = g_\epsilon(x)$$
4. Sei $e_1, \ldots, e_n$ die kanonische ONB von $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie
$$v(x + \lambda e_j) - v(x) = \int_{x_j}^{x_j+\lambda} g(y)dy_j$$
und beenden Sie den Beweis des obigen Satzes.

Aufgabe 20 (3 Punkte). Man beweise, dass die Funktion
$$g(x,t) = -\frac{c}{2}\chi_{[-1,1]}(ct - |x|)$$
Fundamentallösung des eindimensionalen Wellenoperators $\partial_{xx} - \frac{1}{c}\partial_{tt}$ ist.

Aufgabe 21 (3 Punkte). Finden Sie für jede der folgenden Gleichungen jeweils eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ und eine Testfunktion ϕ auf $\mathbb{R}$, die diese lösen.

1. $u * \phi = 0$.
2. $u * \phi = 1$.
3. $u * \phi = x$.

Aufgabe 22 (2 Punkte).

1. Bestimmen Sie $\delta_a * \delta_b$ für $a, b \in \mathbb{R}^n$.
2. Bestimmen Sie $\delta_a * \text{v.p.}(1/x)$, $a \in \mathbb{R}$.