Fachbereich Mathematik und Informatik — Wintersemester 2010/2011
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen
– Blatt 7 –
Abgabe Mittwoch, den 8.12.2010

Aufgabe 23 (Heisenbergsche Unschärfereltion: 4 Punkte). Für eine Funktion $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 dx = 1$ definieren wir ihren:

$$\begin{aligned} \text{Ortserwartungswert:} \quad \langle x\rangle_u &:= \int_{\mathbb{R}} x|u(x)|^2 dx \\ \text{Impulserwartungswert:} \quad \langle p\rangle_u &:= \int_{\mathbb{R}} p|\hat{u}(p)|^2 dp \end{aligned}$$

sowie die

$$\begin{aligned} \text{Ortsunschärfe:} \quad \langle \delta x\rangle_u^2 &:= \int_{\mathbb{R}} (x - \langle x\rangle_u)^2 |u(x)|^2 dx \\ \text{Impulsunschärfe:} \quad \langle \delta p\rangle_u^2 &:= \int_{\mathbb{R}} (p - \langle p\rangle_u)^2 |\hat{u}(p)|^2 dp \end{aligned}$$

a) Man zeige, dass für die Funktion

$$v(x) = e^{ix\langle p\rangle_u} u(x - \langle x\rangle_u)$$

der Orts- und Impulserwartungswert verschwinden und dass die Orts- und Impulsunschärfe von v mit der von u übereinstimmt.

b) Sei

$$Q := \int_{\mathbb{R}} x\bar{v}\partial_x v dx$$

Man beweise, dass $|Q|^2 \leq \langle \delta x\rangle_u^2 \cdot \langle \delta p\rangle_u^2$ (Hinweis: Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

c) Man zeige durch partielle Integration, dass Re $Q = -\frac{1}{2}$ und folgere daraus die *Heisenbergsche Unschärferelation*

$$\langle \delta x\rangle_u^2 \cdot \langle \delta p\rangle_u^2 \geq \frac{1}{4}$$

Aufgabe 24 (4 Punkte). Man berechne die Fouriertransformierten folgender Funktionen:

a) $a(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$

b) $b_1(x) = e^x \chi_{[-\infty,0]}(x)$ und $b_2(x) = e^{-x}\chi_{[0,\infty]}(x)$

c) $c(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (Hinweis: Umkehrformel und Aufgabe b))

d) $d(x) = (1 - |x|)\chi_{[-1,1]}$ (Hinweis: Faltungssatz)

Aufgabe 25 (4 Punkte). Man zeige: $f \in L^1(\mathbb{R})$ hat genau dann supp $f \in [-R, R]$, wenn $\hat{f}$ holomorph ist und wenn eine konstante $C > 0$ existiert, sodass:

$$|\hat{f}(\xi + i\eta)| \leq Ce^{R|\eta|} \text{ für alle } \xi, \eta \in \mathbb{R}.$$