Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher

Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

– Blatt 8 –

Abgabe Mittwoch, den 15.12.2010

Aufgabe 26 (2 Punkte). Sei $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Betrachte die Funktion $e_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch $x \mapsto e^{\langle x, \lambda \rangle}$. Man beweise, daß e_λ ein simultaner Eigenvektor für alle Differentialoperatoren $P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$, ist.

Aufgabe 27 (3 Punkte). Sei $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Beweisen Sie eine der folgenden Behauptungen und zeigen Sie dann die andere:

- Ist $\phi(0) = 0$, ist $\phi = \sum_{j=1}^n x_j \phi_j$, mit $\phi_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
- Ist $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 0$, ist $\phi = \sum_{j=1}^n \partial_j \phi_j$, mit $\phi_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 28 (4 Punkte). Welche sind die möglichen Eigenwerte der Fourier-Transformation auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$? Und auf $L^2(\mathbb{R})$? Finden Sie für 3 Eigenwerte die entsprechenden Eigenfunktionen.

Aufgabe 29 (2 Punkte). Ist P ein linearer partieller Differentialoperator mit polynomialen Koeffizienten, so ist P ein stetiger linearer Operator von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 30 (*). Definiere $GL_n(\mathbb{R})$ als die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen und $SL_n(\mathbb{R}^n)$ als die Untergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$ von Matrizen mit Determinante 1. Sei $n > 1$ und nehmen wir an, daß $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ $SL_n(\mathbb{R}^n)$-invariant ist. Beweisen Sie, daß Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ existieren mit $u = c_1 \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n} + c_2 \delta$. Ist u $GL_n(\mathbb{R})$-invariant, so ist $u = c_1 \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}$.