Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher

Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen
– Blatt 9 –
Abgabe Mittwoch, den 19.01.2010

Aufgabe 31 (4 Punkte). Man berechne die Laplace Transformation der folgenden Funktionen und gebe ihren Definitionsbereich $\Omega(f)$ an.

a) $f(t) = e^{at}$

b) $f(t) = t^n e^{at}$

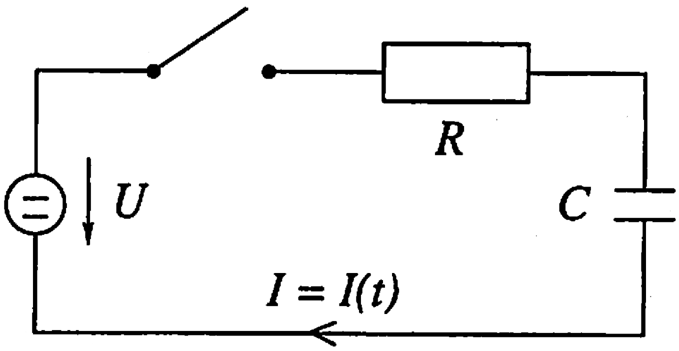
c) $f(t) = \cos(at)$

d) $f(t) = \sinh(at)$

Aufgabe 32 (8 Punkte).

a) Die Laplace Transformation wird in der Elektrodynamik oft zur Berechnung von Stromkreisen benützt.

Gegeben sei folgende Reihenschaltung

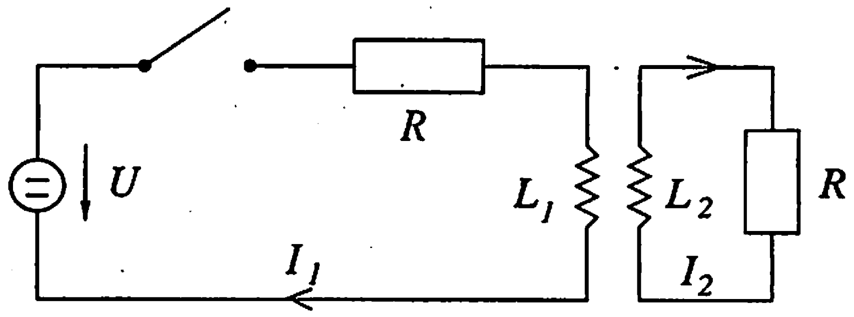


Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter geschlossen und die konstante Spannung U liegt am Stromkreis an. Außerdem sei der Kondensator bei $t = 0$ mit Q_0 geladen. Die zeitliche Entwicklung der Stronstärke $I(t)$, $t \geq 0$ lässt sich dann durch folgende Integralgleichung beschreiben:

$$R \cdot I + \frac{Q_0}{C} + \frac{1}{C} \int_0^t I(s) ds = U$$

Man finde mit der Laplace Transformation die allgemeine Lösung dieser Gleichung.

b) Gegeben sei die folgende Transformatorschaltung:



Für die Induktivität der beiden Spulen gelte $L_1 = n_1^2 L$ und $L_2 = n_2^2 L$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter geschlossen und die konstante Spannung U angelegt. Die Ströme I_1 und I_2 der beiden Stromkreise müssen dann den gekoppelten Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} R \cdot I_1 + n_1^2 L \frac{dI_1}{dt} - n_1 n_2 L \frac{dI_2}{dt} &= U \\ R \cdot I_2 + n_2^2 L \frac{dI_2}{dt} - n_1 n_2 L \frac{dI_1}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

genügen. Man löse mit der Laplace Tranformation diese Differentialgleichungen für den Fall, dass $n_1 I_1(0) = n_2 I_2(0)$.

Hinweis: Ab einem gewissen Zeitpunkt empfiehlt sich eine Matrizenschreibweise. Die Benutzung eines Computeralgebra Programms zum Invertieren der Matrizen und eine Formelsammlung mit Laplace Transorfmationen sind erlaubt.

Aufgabe 33 (4 Punkte*). Man bestimme die Laplace Transformatin der Heaviside-Funktion

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad t < 0 \end{cases}$$

Sowie von $H(t)t^n/n!$. Wie lauten die entwsprechenden Fouriertransformierten, wenn diese Funktionen als temperierte Distributionen aufgefasst werden?