Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher

Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

– Blatt 10 –

Abgabe Mittwoch, den 26.01.2010

Aufgabe 34 (3 Punkte). Sei $\Omega = K(0,1)$. Man beweise, daß die Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$u(x) = u(x_1, \dots, x_n) := \begin{cases} 1 & x_n > 0 \\ 0 & x_n < 0 \end{cases}$$

zu $W^{1,p}(\Omega)$ *nicht* gehört ($1 \leq p \leq \infty$).

Aufgabe 35 (4 Punkte). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $1 \leq p < \infty$.

1. Man beweise, daß eine Teilmenge einer separablen Menge auch separabel ist.
2. Man beweise, daß $W^{1,p}$ separabel ist. Hinweise: Man betrachte die Abbildung $W^{1,p} \to L^p(\Omega) \times L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$, gegeben durch
$$u \mapsto (u, \nabla u),$$
wobei $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ der Raum der Fuktionen $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ mit $u_i \in W^{1,p}$ ist.

Aufgabe 36 (4 Punkte). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Man beweise, daß $W^{1,\infty}$ nicht separabel ist.

Aufgabe 37 (4 Punkte). Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ eine offene beschränkte Menge und sei $x_0 \in \Omega$, $1 \leq p < \infty$. Man beweise das Folgende: ist $u \in C(\overline{\Omega}) \cup C^1(\Omega \backslash \{x_0\})$ mit $\nabla u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$, so ist $u \in W^{1,p}(\Omega)$.