Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher

Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

– Blatt 11 –

Abgabe Mittwoch, den 02.02.2011

Aufgabe 38 (3 Punkte). Man finde eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $\Psi : \Omega \to \Psi(\Omega)$, sowie ein Element $u \in \mathcal{W}_1^1(\Omega)$, so dass $u \circ \Psi^{-1} \notin \mathcal{W}_1^1(\Psi(\Omega))$.

Aufgabe 39 (3 Punkte). Man finde eine offene Menge Ω, welche die Streckeneigenschaft besitzt, für die $C_c^\infty(\Omega)$ nicht dicht in $\mathcal{W}_1^1(\Omega)$ liegt und man gebe explizit ein Element $u \in \mathcal{W}_1^1(\Omega)$ als Gegenbeispiel an.

Aufgabe 40 (4 Punkte).

a) Man finde ein Gebiet Ω, das nicht die Streckeneigenschaft hat.

b) Man finde ein Gebiet Ω, für welches $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)_{|\Omega}$ nicht dicht in $\mathcal{W}_1^1(\Omega)$ liegt.

Aufgabe 41 (4 Punkte). Wir betrachten die von einer reellen Zahl $k > 0$ abhängigen Gebiete

$$\Omega_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, |y| < x^k\}.$$

a) Wann hat Ω_k die Kegeleigenschaft?

b) Betrachte die Funktionen $u(x,y) = x^\alpha$. Man zeige:

  – u liegt in $\mathcal{W}_1^2(\Omega_k)$ für $k > 1, 1-k < \alpha < 0$.
  – u liegt in $\mathcal{W}_2^2(\Omega_k)$ für $k > 3, (3-k)/2 < \alpha < 0$.

Was ergibt sich daraus für das Sobolevsche Lemma?