Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Pablo Ramacher

Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

– Blatt 12 (moralische) –

Abgabe Mittwoch, den 09.02.2011

Aufgabe 42 (3 Punkte). Für $n \in \mathbb{N}$ und w eine positive stetige Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Man definiert der Raum

$$L^2(\mathbb{R}^n, w) = \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \mid wf \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

1. Beweisen Sie, dass $L^2(\mathbb{R}^n, w)$ bezuglich mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n,w)} = \int_{\mathbb{R}^n} w(x)f(x)\overline{w(x)g(x)}dx = \langle wf, wg\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1}$$

   ein Hilbert-Raum ist.

2. Man beweise, dass die Abbildung $\phi_f : L^2(\mathbb{R}^n, w) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, gegeben durch $f \mapsto wf$, surjektiv und unitär ist.

Aufgabe 43 (3 Punkte). Sei $L^2(\mathbb{R}^n, w_s)$ mit $w_s(x) = (1 + |x|^2)^{s/2}$, $s \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Nach der Aufgabe 42, ist der Raum $L^2(\mathbb{R}^n, w_s)$, bezuglich dem Skalarprodukt (**??**) ein Hilbert-Raum. Beweisen Sie, dass

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n, w_s) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$$

Beweisen Sie, dass $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n, w_s)$ sind.

Aufgabe 44 (4 Punkte). Sei $k \in \mathbb{N}$. Beweisen das Folgende: Die Fourier-Transformation $\mathscr{F}$ und ihre inverse $\mathscr{F}^{-1}$ sind surjektive unitäre Abbildungen von $W_2^k(\mathbb{R}^n)$ auf $L^2(\mathbb{R}^n, w_k)$ und von $L^2(\mathbb{R}^n, w_k)$ auf $W_2^k(\mathbb{R}^n)$. In andere Worter, kann man $W_2^k(\mathbb{R}^n)$ als das Bild der Fourier-Transformation von $L^2(\mathbb{R}^n, w_k)$ definieren.

Aufgabe 45 (4 Punkte). Sei $s \in \mathbb{R}$ und w_s wie in der Aufgabe 43. Wir definieren

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \mid w_s\mathscr{F}f \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

1. Zeigen Sie, dass $e^{|x|} \in H^s(\mathbb{R})$ genau dann, wenn $s < \frac{3}{2}$.
2. Sei $a > 0$. Beweisen Sie, dass $\chi_{[-a,a]} \in H^s(\mathbb{R})$ genau dann, wenn $s < \frac{1}{2}$.