

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD XI  
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

**THÈSE**

*présentée pour obtenir le grade de*

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS XI ORSAY

*par*

Octavio PANIAGUA TABOADA

*Sujet :*

**DECOMPOSITION SPECTRALE DES GROUPES  
ORTHOGONAUX PAIRS ET CONSÉQUENCES DES  
CONJECTURES D'ARTHUR**

*Soutenue le 30 mai 2008 après avis des rapporteurs :*

Mme. Colette MCEGLIN      Rapporteur  
M. Joachim SCHWERMER      Rapporteur

*devant la Commission d'examen composée de :*

M. Laurent CLOZEL      Directeur de Thèse  
M. Guy HENNIART  
M. Jean-Pierre LABESSE  
M. Bertrand LEMAIRE  
Mme. Colette MCEGLIN      Rapporteur



# Un grand merci...

Je voudrais d'abord exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse Laurent Clozel. Depuis mon arrivée en France il a su me guider dans un domaine fascinant, m'encadrer avec la rigueur nécessaire, m'encourager dans les moments où la difficulté me semblait inaccessible. Pour moi ont été très remarquables sa modestie et sa maîtrise des sujets à traiter. Je l'en remercie vivement.

Je souhaiterais aussi exprimer ma gratitude à Joachim Schwermer et à Colette Mœglin pour avoir accepté être les rapporteurs de mon travail. Je remercie aussi Guy Henniart, Jean-Pierre Labesse et Bertrand Lemaire qui ont accepté de faire parti de mon jury. Une mention spéciale revient à tous ces professeurs avec qui j'ai eu des discussions très fructueuses et qui ont influencé mon travail et ma vie mathématique, notamment Colette Mœglin, Guy Henniart, Emmanuel Ullmo, Javier Elizondo et d'autres personnes.

Je n'oublie pas tous mes amis et camarades qui ont été proches de moi pendant toute cette aventure. Je ne vais pas écrire tous les prénoms puisque je sais qu'il y aura toujours quelqu'un qui manque. Merci pour tous les beaux moments.

A todos y cada uno de los miembros de mi familia, por su apoyo incondicional. Ustedes han sido siempre una fuente de inspiración.

Μαρία, το πάντσε βιτσολίν, υπάρχεις σ' αυτό το διδακτορικό. Σ' ευχαριστώ για την υπομονή, τον υποστήριξη, τον ενθουσιασμό και την αγάπη σου...

Je remercie également le Conseil National pour la Science et la Technologie (CONACYT) du Mexique, qui m'a accordé une bourse pour la réalisation des mes études en France.





---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Le cas <math>SO_8(\mathbb{Q})</math></b>	<b>13</b>
1.1 Notation et rappels . . . . .	13
1.2 Préliminaires concernant $SO_8(\mathbb{Q})$ . . . . .	14
1.3 Dualité de Langlands . . . . .	15
1.3.1 Sous-groupes de Levi et racines . . . . .	16
1.4 Description du groupe de Weyl de $SO_8$ . . . . .	17
1.5 Formes automorphes . . . . .	19
1.6 Séries d'Eisenstein . . . . .	20
1.7 Opérateurs d'entrelacement . . . . .	21
1.7.1 Fonctions $L$ et opérateurs d'entrelacement . . . . .	21
1.8 Calcul des opérateurs d'entrelacement pour $SO_8$ . . . . .	22
1.9 Résidus des séries d'Eisenstein . . . . .	26
1.10 Holomorphie et non nullité des opérateurs d'entrelacement . . . . .	29
1.11 Existence d'un unique quotient pour $Ind_{\mathcal{P}}^G(\Pi)$ . . . . .	32
<b>2 Le cas <math>SO_{2n}</math></b>	<b>35</b>
2.1 Description du groupe de Weyl et symétries élémentaires . . . . .	37
2.2 Sous-groupes de Levi de corang 1 . . . . .	38
2.3 Séries d'Eisenstein . . . . .	39
2.4 Opérateurs d'entrelacement associés aux symétries élémentaires . . . . .	40
2.5 Pôles des termes constants . . . . .	41
2.6 Action de l'opérateur d'entrelacement et quotients de Langlands . . . . .	43

---

2.7	Exposant cuspidaux et spectre discret . . . . .	48
2.8	Holomorphie et non nullité des opérateurs d’entrelacement . . .	49
2.9	Existence d’un unique quotient pour $Ind_{\mathbb{P}}^G(\Pi)$ . Cas général . . . .	51
<b>3</b>	<b>Paramètres conjecturaux de <math>SO_{2n}</math></b>	<b>53</b>
3.1	Motivations . . . . .	53
3.2	Endoscopie . . . . .	56
3.3	Paramètres dans le cas $SO_8$ . . . . .	58
3.4	Description du cas $SO_{2n}$ . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Paramètres discrets singuliers</b>	<b>61</b>
4.1	Paramètres de $SO_8$ . . . . .	61
4.2	Singularité des formes dans $\mathfrak{n}_Q/\mathfrak{n}_A$ . . . . .	66
4.3	Extension au cas non unitaire . . . . .	70
4.4	Paramètres de $SO_{2n}$ . . . . .	73
4.5	Singularité de ces paramètres, cas $SO_{2n}$ . . . . .	77
4.5.1	Paramètres plus excentriques . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Majoration des opérateurs de Hecke</b>	<b>83</b>
5.1	Estimées pour le groupe symplectique . . . . .	83
5.2	Estimées pour $SO_{2n}$ . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Résultats locaux</b>	<b>89</b>
6.1	Comparaison des caractères . . . . .	89
6.1.1	Calcul des caractères . . . . .	89
6.2	Conséquence pour les fonctions non ramifiées . . . . .	99
6.3	Vérification de la formule pour le facteur de transfert $\Delta(t, t')$ . . .	100
6.3.1	Éléments associés . . . . .	100
6.4	Calcul du facteur de transfert . . . . .	104
6.4.1	Facteur $\Delta_I$ . . . . .	104
6.4.2	Facteur $\Delta_{II}(\gamma, \delta)$ . . . . .	104
6.4.3	Facteur $\Delta_{III}$ . . . . .	106
<b>7</b>	<b>Conclusion locale : paquets locaux d’Arthur</b>	<b>111</b>
7.1	Définition des objets . . . . .	111
7.2	Irréductibilité locale . . . . .	117
<b>8</b>	<b>Résultats globaux</b>	<b>121</b>
8.1	Description des objets . . . . .	121
8.2	Cas partout non ramifié . . . . .	123
	<b>Bibliographie</b>	<b>125</b>

# Introduction

Un problème classique dans la théorie des formes automorphes est la décomposition spectrale de la représentation régulière droite sur l'espace  $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ , où  $G$  est un groupe réductif connexe défini sur un corps de nombres  $F$ . Il est connu, par des résultats d'analyse harmonique que cette représentation se décompose en une somme hilbertienne

$$L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) = L_d^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) \hat{\oplus} L_{\text{cont}}^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) \quad (0.1)$$

de son spectre discret et son spectre continu. La théorie des séries d'Eisenstein permet de comprendre la partie continue à partir du spectre discret des sous-groupes de Levi et donc la question fondamentale qui se pose est la description détaillée du spectre discret  $L_d^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ . Ce spectre discret possède une décomposition orthogonale plus précise en

$$L_d^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) = L_{\text{cusp}}^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) \hat{\oplus} L_{\text{res}}^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) \quad (0.2)$$

où  $L_{\text{cusp}}^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$  est le sous-espace de formes cuspidales et  $L_{\text{res}}^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$  est appelé le spectre résiduel (construit à partir des résidus des séries d'Eisenstein).

Après ses notables résultats sur la formule des traces, James Arthur proposa une série de conjectures qui décrivent le spectre discret des groupes réductifs. Il propose des paramètres locaux et globaux. Globalement les paramètres sont des homomorphismes continus du produit direct d'un groupe conjectural  $\mathcal{L}_F$  (qui n'a pas une définition en général et appelé parfois groupe de Langlands) avec  $SL_2(\mathbb{C})$  dans le  $L$ -groupe  ${}^L G$  de  $G$

$$\psi : \mathcal{L}_F \times SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L G \quad (0.3)$$

considéré modulo conjugaison par  ${}^L G$ . On demande que la restriction au facteur  $SL_2$  soit une morphisme algébrique. On écrit  $\Psi(G)$  pour l'ensemble de classes de conjugaison par  ${}^L G$  des paramètres d'Arthur pour  $G$ . Par restriction de (0.3) à chaque place  $v$  on obtient des paramètres locaux

$$\psi_v : \mathcal{L}_{F_v} \times SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L G_v \quad (0.4)$$

où  $\mathcal{L}_{F_v}$  est le groupe local de Langlands ( $W_{F_v} \times SL_2(\mathbb{C})$ ) et  ${}^L G_v$  est le  $L$ -groupe de l'extension des scalaires  $G_v = G \otimes F_v$ . Il faut remarquer que le groupe global  $\mathcal{L}_F$ , pour l'instant, est purement hypothétique. Ce group devrait être une extension du groupe de Weil global  $W_F$ , avec une classe de conjugaison de plongements

$$\begin{array}{ccc} L_{F_v} & \longrightarrow & W_{F_v} \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_F & \longrightarrow & W_F \end{array}$$

Les conjectures locales d'Arthur, associent à chaque  $\psi_v$  un ensemble fini  $\Pi_{\psi_v}(G_v)$  de classes d'isomorphisme de représentations unitarisables de  $G(F_v)$  appelé un  $A$ -paquet. Cet  $A$ -paquet pour toute place  $v$ , sauf un nombre fini, doit contenir une représentation non ramifiée  $\pi_v$ , de telle manière que le  $A$ -paquet se décompose comme  $\Pi_{\psi_v}(G_v) = \otimes \pi_v$  et  $\pi_v$  non ramifiée presque par tout. Les conjectures d'Arthur prédisent la multiplicité de chaque élément dans le spectre discret de la représentation régulière droite de  $G(\mathbb{A})$ .

Les conjectures d'Arthur visent à comprendre le spectre discret des groupes classiques à partir du spectre discret de  $GL_N$ . Arthur reformule les résultats de Mœglin et Waldspurger [M-W89] de telle manière qu'ils puissent être étendus aux groupes classiques. Arthur représente le spectre discret de  $GL_N$  par un ensemble d'objets formels. Soit  $\Psi_2(GL_N)$  l'ensemble de produits tensoriels formels

$$\psi = r_n \otimes sp_m \quad (0.5)$$

où  $r_n$  est une représentation automorphe unitaire cuspidale et irréductible de  $GL_n$ , de degré  $n$  et  $sp_m$  dénote l'unique (à isomorphisme près) représentation irréductible de dimension  $m$  du groupe de Lie  $SL_2(\mathbb{C})$ , pour des entiers positifs  $n$  et  $m$  tels que  $N = nm$ . On fixera désormais la notation  $sp_m$  pour cette représentation irréductible de dimension  $m$  de  $SL_2(\mathbb{C})$ . On rappelle que toute représentation irréductible de  $SL_2(\mathbb{C})$  est autoduale. Il est bien connu que  $sp_m$  est symplectique si  $m$  est paire et orthogonale si  $m$  est impaire. Pour un tel  $\psi$  on forme la représentation induite

$$Ind_P^G(\underbrace{(r_n \otimes \cdots \otimes r_n)}_m) \delta_P^{\frac{1}{2}} \quad (0.6)$$

de  $GL_N(\mathbb{A})$  où  $P$  est le sous-groupe parabolique standard du type  $(n, \dots, n)$ . On note  $\pi_\psi$  l'unique quotient irréductible de la représentation (0.6). Le résultat principal de Mœglin et Waldspurger dans [M-W89] établit que l'application



---

$\psi \rightarrow \pi_\psi$  est une bijection de  $\Psi_2(GL_N)$  dans l'ensemble de représentations automorphes de  $GL_N$  qui apparaissent dans le spectre discret.

Une autre problème lié au spectre résiduel est l'estimation des valeurs propres des opérateurs de Hecke pour le groupe  $SO_{2n}$ . Ces opérateurs de Hecke sont en général donnés comme des doubles classes. Ils ont été étudiés pour le groupe de similitudes symplectique  $GSp_n$  (provenant de l'étude des formes modulaires de Siegel) par Duke, Howe et Li [DHL92]. Ils ont établi les meilleures estimées connues pour les valeurs propres de Hecke dans ce cas. De même Clozel et Ullmo ont donnés des nouvelles estimées, en utilisant des résultats de théorie ergodique, des groupes  $Sp_{2n}$  et groupes orthogonaux impairs  $SO_{2n+1}$ . La question est comment peut-on donner des estimées optimales pour  $SO_{2n}$ , en utilisant les conjectures d'Arthur. Ce problème est abordé aussi dans la thèse.

Le **premier chapitre** est une brève introduction aux méthodes qui seront utilisés partout dans la thèse, des rappels de la théorie des séries d'Eisenstein et théorie de représentations nécessaire. On considère le groupe orthogonal déployé  $SO_8$ . On construit une représentation résiduelle qui est de carré intégrable. Pour la construction, on considère des sous-groupes de Levi d'intérêt pour nous, à savoir des blocs de type  $GL_2$ . Soit  $\pi$  une représentation cuspidale de  $GL_2$  on introduit la représentation

$$\pi \otimes s := \pi \otimes |\det(g)|^s, \quad s \in \mathbb{C}.$$

On considère l'induite parabolique (unitaire) à partir du sous-groupe de Levi  $GL_2 \times GL_2$  définie par

$$\Pi := \pi_1 \otimes s_1 \otimes \pi_2 \otimes s_2$$

A partir de cette représentation induite on construit la série d'Eisenstein associée à cette représentation  $\Pi$ , pour  $\phi$  une fonction dans l'espace  $\Pi$  :

$$E(\phi_\pi, \pi)(g) = \sum_{\gamma \in P(k) \backslash G(k)} \phi_\pi(\gamma g).$$

Les termes constants de cette série d'Eisenstein sont de grand intérêt pour nous, car les termes constants ont les mêmes pôles que toute la série. Ces termes constants sont en général donnés par des opérateurs d'entrelacement dont on étudie la continuation. Ces opérateurs d'entrelacement contenant les pôles des termes constants admettent une factorisation comme produit d'opérateurs simples. Il s'avère que ces opérateurs sont des produits des quotients des fonctions  $L$ , et ses pôles sont bien connus. On calcule *explicitement* tous les opérateurs d'entrelacement et on explicite leurs pôles. On construit ensuite une série d'Eisenstein modifiée  $E_P^*(\phi, s)$  en multipliant par des facteurs nécessaires afin que cette série soit holomorphe au point  $s_0 = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ . On montre que alors  $E_P^*(\phi, s) \in L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ . On montre ensuite l'existence d'un unique sous-quotient irréductible de la représentation

---

Le **chapitre 2** est la généralisation naturelle des résultats du premier chapitre au groupe  $SO_{2n}$ . On construit une représentation résiduelle  $\Pi$  à partir d'un sous-groupe de Levi formé par des blocs de type  $GL_2$ . On définit et calcule des quotients de Langlands (quotients de fonctions  $L$  de Langlands) pour montrer les pôles qui apparaissent dans les opérateurs d'entrelacement. Dans le cas général on étudie le point  $s_0 = (\frac{m-1}{2}, \dots, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$  et on analyse la convergence de la série d'Eisenstein. On construit une série d'Eisenstein modifiée qui sera méromorphe au point  $s_0$ . On montre comme auparavant que la représentation induite possède une sous-quotient irréductible qui est de carré intégrable qui possède la paramétrisation d'Arthur. Ces résultats pour le groupe  $SO_{2n}$  sont **inconditionnels**.

Dans le **chapitre 3** on admet les résultats locaux et globaux d'Arthur ([Art05], chapitre 30) et on décrit avec plus de détail les conséquences pour le spectre résiduel de  $SO_8$  et de  $SO_{2n}$ . On s'intéresse particulièrement aux paramètres dont les matrices de Hecke peuvent avoir des valeurs propres plus grands en valeur absolue. On décrit tous les paramètres possibles dans le cas de  $SO_8$  et on analyse les possibles cas. Dans le cas de  $SO_{2n}$  on décrit succinctement ces paramètres, en signalant quel type des blocs on peut y trouver.

Le **chapitre 4** est consacré à l'étude des paramètres de  $SO_8$  et de  $SO_{2n}$  qui peuvent avoir des matrices de Hecke avec des valeurs propres plus grandes. On montre que ces paramètres sont singuliers dans un sens défini par Li [Li89] et qui est expliqué dans le chapitre. On calcule à l'aide de la théorie de Mackey (pour le cas unitaire) la restriction d'une représentation induite et puis on donne l'argument de singularité. Ce résultat est étendu au non unitaire en utilisant des théorèmes standard de la théorie des représentations. La conséquence principale est que ces paramètres étant singuliers, ne peuvent pas être cuspidaux. Ces résultats sont **inconditionnels**.

Dans le **chapitre 5** on estime les valeurs propres des opérateurs de Hecke pour le groupe  $SO_{2n}$ , via le calcul de la transformé de Satake de la fonction caractéristique associée à la double classe correspondante. Ce calcul est la transformée de Satake est fait d'après un résultat de Kottwitz sur les variétés de Shimura [Kot84]. Sous les conjectures d'Arthur on trouve des estimées optimales pour les valeurs propres de Hecke. Finalement on compare ces estimées optimales avec ceux connus actuellement qui se dérivent des approximations de la conjecture de Ramanujan pour  $GL_n$ .

Le **chapitre 6** a pour but le calcul des caractères tordus afin de comparer la multiplicité des représentations construites aux chapitres 1 et 2 avec celle prédite par Arthur. On traite le groupe  $SO_{2n}$  comme une donnée endoscopique maximale de  $GL_{2n} \times \theta$  où  $\theta$  est l'automorphisme extérieur associé à la matrice antidiagonal  $J$  (voir le chapitre pour la définition précise). On explique à quoi correspondent tous les termes présents dans la définition du caractère ( $SO_{2n}$ ) et du caractère tordu ( $GL_{2n}$ ) puis on les calcule. On explique en détail l'appli-

---

cation appelée *norme* entre classes de conjugaison stables de  $SO_{2n}$  et les classes de conjugaison  $\theta$ -stables de  $GL_{2n}$ . Une fois les caractères calculés, on montre une identité de formule de traces, où le terme de transfert admet une forme relativement simple. Dans la suite on justifie la construction de la norme dans notre cas. On montre que dans notre cas le terme de transfert  $\Delta$  qui en général est un produit de 4 facteurs, dans notre cas devient le terme  $\Delta_{IV}$ , étant les termes  $\Delta_I$ ,  $\Delta_{II}$  et  $\Delta_{III}$  égaux à 1.

Dans le **chapitre 7** on montre comment les résultats conjecturaux d'Arthur ([Art05], chapitre 30) correspondent avec nos résultats au moins dans le cas du paramètre  $\psi$  y étudié. On définit les objets locaux décrits dans le théorèmes locaux de *loc. cit.* et ils sont calculés dans notre cas. On calcule les centralisateurs dans le groupe dual, qui seront toujours connexes et on donne un critère pour établir l'irréductibilité de la représentation locale à l'aide du calcul des opérateurs d'entrelacement qui possèdent des pôles. Finalement le **chapitre 8**, définit les objets globaux nécessaires pour comprendre les résultats globaux d'Arthur ([Art05]). On décrit de même les conséquences pour le spectre discret, on formule une identité de traces et on montre que dans le paquet de  $\psi$  on ne peut pas avoir de représentations cuspidales, ce qui nous donne un résultat sur le spectre cuspidal. On doit souligner que ces résultats dépendent de ceux annoncés par Arthur [Art05].



---

# Le cas $SO_8(\mathbb{Q})$

## 1.1 Notation et rappels

Dans tout ce travail nos objets d'étude seront les groupes orthogonaux pairs déployés. Dans certains cas on fera appel à des résultats qui sont vrais pour des groupes réductifs plus généraux que l'on précisera. Soit  $G$  un groupe réductif connexe défini sur  $F$ , un corps de nombres. On notera par  $\mathbb{A}_F$  l'anneau des adèles de  $F$ . Soit  $T$  un tore maximal de  $G$ . On note  $X^*(T)$  le groupe des caractères rationnels de  $T$  dans  $GL_1$ . On pose  $X_*(T)$  le groupe des homomorphismes de  $GL_1$  à  $T$ . Soit  $X^*(T)_F$  le groupe de caractères  $F$ -rationnels de  $T$  dans  $GL_1$ , c'est-à-dire, ceux définis sur  $F$  (ils envoient  $T(F)$  dans  $GL_1(F)$ ).  $T$  est *déployé* si  $X^*(T) = X^*(T)_F$ .

$G$  est *déployé* sur  $F$  s'il a un tore maximal qui est déployé sur  $F$ . Supposons désormais  $G$  déployé. Soit  $T$  un tore maximal et fixons un sous-groupe  $B$  de Borel de  $G$ , i.e., un sous-groupe connexe maximal résoluble contenant  $T$ . Si on note  $U$  le radical unipotent de  $B$ , on a  $B = TU$  et le tore agit par adjonction sur  $U$  en définissant des caractères (racines) de  $T$  dans  $U$ . On note par  $\Sigma \subset X^*(T)$  ces racines. On peut identifier les coracines  $\Sigma^\vee$  de  $T$  avec un sous-ensemble de  $X_*(T)$ . Alors  $(\Sigma, X^*(T), \Sigma^\vee, X_*(T))$  forment une donnée radicielle. Pour  $F$  un corps global ou local, il existe une bijection canonique entre classes d'isomorphisme de  $\overline{F}$ -groupes réductifs connexes et classes d'isomorphisme de données radicielles ([Bor79]).

Le but de ce chapitre est d'expliquer une construction de représentations résiduelles pour le groupe déployé  $SO_8$  et leurs propriétés. Pour simplifier les notations, on supposera dans ce mémoire que  $F = \mathbb{Q}$ . Ceci ne change rien, ni

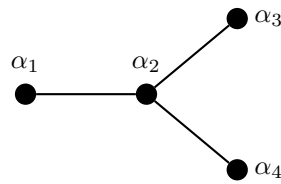
aux résultats, ni aux démonstrations.

## 1.2 Préliminaires concernant $SO_8(\mathbb{Q})$

Considérons le groupe orthogonal  $SO_8(\mathbb{Q})$  de rang 4 et déployé sur  $\mathbb{Q}$ . Rappelons que l'on a une forme quadratique  $Q$  associée à notre groupe  $SO_8(\mathbb{Q})$ , la forme quadratique représentée par la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} & & & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ 1 & & & & & & & \end{pmatrix}$$

On sait aussi que le diagramme de Dynkin du groupe  $SO_8$  est du type  $D_4$  :



(1.1)

où  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  sont les racines simples notées  $\Delta_0$  par rapport au tore maximal  $T$  de rang 4 déployé sur  $\mathbb{Q}$ , de la forme :

$$T_{\mathbb{Q}} = \begin{pmatrix} x_1 & & & & & & & \\ & x_2 & & & & & & \\ & & x_3 & & & & & \\ & & & x_4 & & & & \\ & & & & x_4^{-1} & & & \\ & & & & & x_3^{-1} & & \\ & & & & & & x_2^{-1} & \\ & & & & & & & x_1^{-1} \end{pmatrix} \quad x_i \in \mathbb{Q}^*$$

On va représenter ce tore maximal déployé comme  $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\}$ . Avec notre notation, ces racines simples  $\Delta_0$  sont (écrites additivement sur l'algèbre

de Lie) :

$$\Delta_0 = \{\alpha_1 = X_1 - X_2, \quad \alpha_2 = X_2 - X_3, \quad \alpha_3 = X_3 - X_4, \quad \alpha_4 = X_3 + X_4\}$$

Toutes les racines peuvent être décrites comme l'ensemble : (écrit de manière additive)

$$\Sigma_{SO_8} = \{\pm X_i \pm X_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$$

### 1.3 Dualité de Langlands

Soit  $G$  un groupe réductif arbitraire sur  $\mathbb{Q}$ , avec tore maximal  $T$  et données radicielles associées  $\psi(G) = (X^*(T), \Sigma, X_*(T), \Sigma^\vee)$ . Soit  $\widehat{G}$  le groupe de Lie réductif complexe (tore maximal noté  ${}^L T$ ) dont les données radicielles associées sont isomorphes aux données radicielles duales de  $G$ , c'est-à-dire  $\psi(\widehat{G}) = (X_*(T), \Sigma^\vee, X^*(T), \Sigma)$ . On remarque que le groupe  $\widehat{G}$  ne dépend que de  $G$  vu comme groupe sur la clôture algébrique  $\overline{\mathbb{Q}}$  de  $\mathbb{Q}$ .

**Exemple 1.3.1.** Le cas le plus simple est celui de  $GL_n$ . Dans ce cas  $\widehat{G} = GL_n(\mathbb{C})$  car les données radicielles son autoduales :  $\Sigma = \mathbb{Z}^n$  avec sa base canonique  $\{e_i\}$ . Soit  $\{f_i\}$  la base duale associée de  $\Sigma^\vee = \mathbb{Z}^n$ , nous avons comme racines  $\Sigma = \{e_i - e_{i+1}, 1 \leq i < n\}$ ,  $\Sigma^\vee = \{f_i - f_{i+1}, 1 \leq i < n\}$ , par suite les données radicielles sont duales.

Les cas des groupes classiques du type  $\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n, \mathcal{C}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7$ , etc, sont bien connus : les groupes  $\mathcal{B}_n$  et  $\mathcal{C}_n$  sont permutés entre eux, alors que les autres restent stables lors de la transposition duale de leur données radicielles.

Pour un groupe réductif connexe arbitraire on pose

$${}^L G = \widehat{G} \rtimes \Gamma_{\mathbb{Q}}$$

où  $\Gamma_{\mathbb{Q}}$  le groupe de Galois de  $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$  avec une action de  $\Gamma_{\mathbb{Q}}$  sur  $\widehat{G}$ . Dans le cas où  $G$  est un groupe déployé sur  $\mathbb{Q}$ , cette action est triviale et on peut poser simplement

$${}^L G = \widehat{G} \times \Gamma_{\mathbb{Q}}$$

On considèrera les complétions locales  $\mathbb{Q}_v$  (complétion de  $\mathbb{Q}$  en la place  $v$ ), où  $\mathbb{Q}_v$  est un corps local non archimédien et on considèrera leurs représentations locales. Parmi ces représentations, seront de notre intérêt les représentations non ramifiées, *i.e.*, celles possédant un vecteur fixe pour le groupe compact maximal  $G(O_{\mathbb{Q}_v})$ . Si  $\pi_v$  est une représentation non ramifiée alors  $\pi_v$  est l'unique sous-quotient ayant un vecteur  $G(O_{\mathbb{Q}_v})$  fixe dans l'induite

$$\rho = \text{Ind}_{B(\mathbb{Q}_v)}^{G(\mathbb{Q}_v)}(\chi)$$

où  $\chi$  est un caractère non ramifié de  $T(\mathbb{Q}_v)$ . A une représentation non ramifiée  $\pi_v$  d'un groupe (que l'on suppose déployé sur  $\mathbb{Q}_v$ ) on peut associer une classe de conjugaison semisimple du groupe dual  $\widehat{G}$ . Dans ce thèse,  $\widehat{G}$  sera un groupe

de matrices et on représentera cette classe de conjugaison par une matrice (diagonale)  $t_{\pi_v}$  que l'on appellera *matrice de Hecke* de la représentation  $\pi_v$ . Cette classe de conjugaison n'est définie que pour  $\pi_v$  non ramifiée. L'existence d'une correspondance canonique

$$\pi_v \longleftrightarrow t_{\pi_v}$$

entre une représentation non ramifiée et une classe de conjugaison semisimple est donnée par l'isomorphisme de Satake. En utilisant cet isomorphisme, on peut démontrer le fait que les représentations non ramifiées sont des sous-quotients des séries principales sphériques (voir [Car79]).

### 1.3.1 Sous-groupes de Levi et racines

Fixons un tore déployé maximal  $T$  de  $G$  ( $G$  est toujours un groupe réductif connexe arbitraire) dans notre groupe de Borel  $B$ . On pose  $\Delta_0$  l'ensemble des racines simples de  $T$ . Pour un sous-ensemble  $\Theta \subset \Delta_0$ , soit

$$A_\Theta = \left( \bigcap_{\alpha \in \Theta} \ker \alpha \right)^0,$$

la composante connexe de  $\bigcap_{\alpha \in \Theta} \ker \alpha$ . Soit  $M_\Theta$  le centralisateur de  $A$  dans  $G$ .

Nous avons  $T \subset M_\Theta$  et soit  $N_\Theta$  le sous-groupe de  $U$  engendré par les racines simples qui se trouvent dans le complément de  $\Theta$ . Alors  $P_\Theta = M_\Theta N_\Theta$  est le sous-groupe parabolique standard associé à  $\Theta$  avec groupe de Levi  $M_\Theta$  et radical unipotent  $N_\Theta$ . Un sous-groupe parabolique de  $G$  est alors un conjugué de  $P_\Theta$  pour un certain  $\Theta$ .

Soit  $P = MN$  un sous-groupe parabolique de  $G$  standard par rapport à un sous-groupe de Borel  $B$ . Soit  ${}^L G$  le  $L$ -groupe de  $G$  et notons  ${}^L M$  le sous-groupe de  ${}^L G$  engendré par  $\Theta^\vee$  les coracines de  $T$  définies par les racines dans  $\Theta$ . Nous avons que  ${}^L G$  a un tore maximal tel que  $X^*({}^L T) = X_*(T)$  et  $X_*({}^L T) = X^*(T)$ . Le sous-ensemble de racines de  ${}^L T$  est  $\Delta_0^\vee$ , les coracines de  $T$ . Fixons un groupe de Borel  ${}^L B$  de  ${}^L G$  tel que  ${}^L T \subset {}^L B$ . Soit  ${}^L U$  son radical unipotent. Alors l'ensemble de coracines de  $T$  définies par des racines positives de  $T$  peut être identifié avec les racines de  ${}^L T$  dans  ${}^L U$ . Soit  ${}^L N$  le sous-groupe de  ${}^L U$  engendré par les racines positives dans  ${}^L U$  qui ne sont pas engendrées par  $\Theta^\vee$ . Le sous-groupe  ${}^L P = {}^L M {}^L N$  de  ${}^L G$  est appelé le  $L$ -groupe de  $P$ . Il est standard par rapport à  ${}^L B$ .

Supposons désormais  $G$  déployé. Soit  $P = MN$  un sous-groupe parabolique standard de  $G$ ,  $N \subseteq U$  et  $A$  la composante connexe du centre de  $M$ . Soient  $X(M)^*$  et  $X(A)^*$  le sous-groupe de caractères  $\mathbb{Q}$ -rationnels de  $M$  et  $A$ . On pose

$$\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} = \text{Hom}(X^*(M), \mathbb{R}) = \text{Hom}(X^*(A), \mathbb{R})$$

Le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathfrak{a}$  est appelé l'algèbre de Lie réelle de  $A$ . Son  $\mathbb{R}$ -dual est

$$\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^* = X^*(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = X(A)^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$



On pose  $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* = \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ . On définit maintenant un morphisme  $H_M : M(\mathbb{A}) \rightarrow \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$  donné par

$$\exp \langle \chi, H_M(m) \rangle = \prod_v |\chi(m_v)|_v$$

où  $\chi \in X(M)$  et  $m = (m_v) \in M(\mathbb{A})$ .

En général si  $M$  est un sous-groupe de Levi de  $G$  et  $\pi$  est une représentation irréductible de  $M(\mathbb{A})$ , on note  $\chi_{\pi}$  le caractère central de  $\pi$ , qui est un caractère du centre de  $M(\mathbb{A})$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . A ce caractère on peut associer un élément  $Re \chi \in \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^*$  qui vérifie  $|\chi(m)| = \langle Re \chi, H_M(m) \rangle$ .

## 1.4 Description du groupe de Weyl de $SO_8$

On sait que le groupe de Weyl associé à notre diagramme de type  $D_4$  est le groupe  $\mathfrak{S}_4 \times S(\pm 1)^4$  où  $\mathfrak{S}_4$  est le groupe de permutations à 4 éléments et  $S(\pm 1)^4$  est le groupe des éléments de  $(\pm 1)^4$  dont le produit total est égal à 1, donc isomorphe à  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ . Si  $w \in W$  l'action du groupe de Weyl  $W$  est donnée par  $(X_1, X_2, X_3, X_4) \mapsto (\epsilon_1 X_{\sigma^{-1}(1)}, \epsilon_2 X_{\sigma^{-1}(2)}, \epsilon_3 X_{\sigma^{-1}(3)}, \epsilon_4 X_{\sigma^{-1}(4)})$  où  $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ ,  $\prod \epsilon_i = 1$ . Considérons notre tore déployé  $T \subset G = SO(8, \mathbb{Q})$ .

Considérons le sous-groupe de Levi  $M$  engendré par les racines  $\alpha_1$  et  $\alpha_3$ , donc  $M \simeq GL(2) \times GL(2)$  et  $T \subset M$ . Le tore maximal  $T_M$  du centre de  $M$  est  $T_M = \{(x, x, y, y)\}$ . Il s'en suit que l'algèbre de Lie a la forme

$$\mathfrak{a}_M = \{(X, X, Y, Y) \mid X, Y \in \mathbb{R}\}$$

De la même manière on va considérer les "racines"  $R(T_M, G)$  de  $G$  par rapport à  $T_M$  obtenues en restreignant les racines au tore  $T_M$ ,  $r : R(T_0, G) \rightarrow R(T_M, G) \cup \{0\}$ . Alors nous avons les "racines" :

$$R(T_M, G) = \{\pm X \pm Y, \pm 2X, \pm 2Y\}$$

où les racines positives sont  $\{X - Y, 2X, 2Y, X + Y\}$  et on dénote par  $\Delta_M$  le sous-ensemble de  $R(T_M, G)$  formé par les restrictions non triviales des racines simples  $\Delta_0$ . Dans notre cas  $r(\alpha_1) = 0$ ,  $r(\alpha_2) = X - Y$ ,  $r(\alpha_3) = 0$ ,  $r(\alpha_4) = 2Y$ . Donc nous avons un vrai système de racines de type  $C_2 = B_2$ .

$$\Delta_M = \{X - Y, 2Y\}$$

Faisons le calcul de  $\rho_P$  la demi-somme des racines restreintes au tore  $T_M$ . On trouve que

$$2\rho_P = 4(X - Y) + 4(X + Y) + 2X + 2Y = 10X + 2Y$$

Soit  $\eta \in \Delta_M$  une racine et soit  $\eta_0$  l'unique élément de  $\Delta_0$  qui se projette sur  $\eta$ . Alors on a deux possibilités :

$$\begin{cases} \eta = X - Y & \eta_0 = \alpha_2 = X_2 - X_3 \\ \eta = 2Y & \eta_0 = \alpha_4 = X_3 + X_4 \end{cases}$$

On note  $M_\eta$  le sous-groupe de Levi standard de  $G$  tel que  $\Delta_0^{M_\eta} = \{\eta_0\} \cup \Delta_0^M$  où  $\Delta_0^M = \Delta_0 \cap R(T_0, M)$ . On va s'intéresser à  $M_{\alpha_2} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$  et  $M_{\alpha_4} = \langle \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4 \rangle$ . D'après ces remarques on sait  $M \simeq GL(2) \times GL(2)$ ,  $M_{\alpha_2} \simeq GL(4)$  et  $M_{\alpha_4} \simeq GL(2) \times SO(4)$ . Il est clair que  $M$  est un sous-groupe de Levi maximal de  $M_{\alpha_2}$  et de  $M_{\alpha_4}$ .

Le groupe de Weyl  $W_M$  de  $M$  par rapport à  $T$  est isomorphe à  $\langle (1, 2), (3, 4) \rangle$  (car  $M \simeq GL(2) \times GL(2)$ ). Par suite  $W_M$  isomorphe à  $\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$  et il se plonge de manière canonique dans le sous-groupe  $\mathfrak{S}_4 \times (1, 1, 1, 1)$  du groupe de Weyl global  $W$ . On remarque d'abord que  $W_M \subset W^{\mathfrak{a}_M}$ . Réciproquement  $w \in W^{\mathfrak{a}_M}$  si et seulement si  $w$  commute à  $\mathfrak{a}_M$ . D'ailleurs  $G^{\mathfrak{a}_M} = M$ , par suite  $w \in W^{\mathfrak{a}_M} \iff w \in W_m$ . De cette manière le quotient  $W/W_M$  agit fidèlement sur  $\mathfrak{a}_M$ .

Avec la finalité de calculer les opérateurs d'entrelacement, et les termes constants des séries d'Eisenstein on a besoin de trouver les éléments  $W(M)$  de  $w \in W$  dont la classe dans  $W/W_M$  est minimale et qui satisfont aussi que  $wMw^{-1}$  est encore un Levi standard de  $G$ . Mais si  $w \in W$  satisfait que  $wMw^{-1}$  est un autre Levi, ceci entraîne que  $M = wMw^{-1}$ . Le sous-groupe  $wMw^{-1}$  doit être égal à  $\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle$  ou  $\langle \alpha_1, \alpha_4 \rangle$ , d'après la forme du diagramme, et on vérifie aussitôt que le dernier n'est pas conjugué à  $M$ .

On peut déterminer les deux symétries élémentaires  $w_1$  et  $w_2$  qui engendrent les éléments de  $W(M)$ . Nous avons une caractérisation ([Cas], lemme 1.1.2) des éléments qui ont une longueur minimal modulo  $W_M$  :  $w \in W$  a une longueur minimale dans sa classe (modulo  $W_M$ ) si et seulement si  $w\alpha > 0$  et  $w\gamma > 0$ . Nous avons aussi des caractérisation des symétries élémentaires dont on va utiliser la suivante ([M-W95], §I.1.7, lemme, page 13) :

$$\{\eta \in R_{ind}(T_M, G) \mid \eta > 0, w_\alpha \eta < 0\} = \{\alpha\}.$$

Écrivons les symétries élémentaires.

Notre première symétrie élémentaire est  $w_1 = (1, 3)(2, 4)(1, 1, 1, 1)$ , qui est bien un élément de longueur minimale dans sa classe modulo  $W_M$  et satisfait le critère de [M-W95]. L'autre symétrie élémentaire est l'élément  $w_2 = (3, 4)(1, 1, -1, -1)$ . On remarque que pour les calculs dans les opérateurs d'entrelacement on utilisera simplement leur image dans le quotient  $W_G/W_M$ , ce qui nous ramène au système de racines de type  $C_2$ . Par suite  $w_1 = (1, 2)(1, 1)$  et  $w_2 = 1(1, -1)$ . Les 8 éléments de  $W(M)$  sont :

$$\begin{aligned} W(M) = & \left\{ 1, w_1 = (1, 2)(1, 1), w_2 = 1(1, -1), \right. \\ & w_1 w_2 = (1, 2)(-1, 1), w_2 w_1 = (1, 2)(1, -1), \\ & w_1 w_2 w_1 = 1(-1, 1), w_2 w_1 w_2 = (1, 2)(-1, -1), \\ & \left. w_0 = w_1 w_2 w_1 w_2 = w_2 w_1 w_2 w_1 = 1(-1, -1) \right\} \end{aligned}$$

## 1.5 Formes automorphes

Considérons  $P = MU$  un sous-groupe parabolique standard de  $G$ , un groupe réductif connexe défini sur  $\mathbb{Q}^1$ . et  $\phi : U(\mathbb{A})M(\mathbb{Q})\backslash G \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction. On dit que  $\phi$  est *automorphe* si elle satisfait les conditions suivantes (pour les détails voir [M-W95], page 37) :

1.  $\phi$  est à croissance modérée.
2.  $\phi$  est lisse.
3.  $\phi$  est  $K$ -finie, où  $K$  est un sous-groupe compact maximal de  $G$ .
4.  $\phi$  est  $\mathfrak{Z}$ -finie, où  $\mathfrak{Z}$  est le centre de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de  $G_\infty$  ( $G_\infty$  est la partie qui correspond dans les places archimédiennes).

Soient  $P = MU$  un sous-groupe parabolique standard de  $G$ ,  $\phi$  une fonction sur  $U(\mathbb{Q})\backslash G$  lisse et localement  $L^1$ .

**Définition 1.5.1.** On définit une fonction  $\phi_P$  sur  $U(\mathbb{A})\backslash G$  lisse et localement  $L^1$

$$\phi_P(g) = \int_{U(\mathbb{Q})\backslash U(\mathbb{A})} \phi(ug) du$$

on l'appelle le terme constant le long de  $P$ .

Soient  $P = MU$  un sous-groupe parabolique standard de  $G$ ,  $\phi$  une forme automorphe sur  $U(\mathbb{A}_\mathbb{Q})M(\mathbb{Q})\backslash G$ . On dit que  $\phi$  est *cuspidale* si pour tout sous-groupe parabolique  $P'$  tel que  $P' \subset P$ , on a  $\phi_{P'} = 0$ .

On s'intéresse aux formes cuspidales sur  $M = M(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ . Si l'on fixe un caractère unitaire  $\chi$  de  $T_M = T(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$  où  $T_M$ , est la composante déployée de  $M$ . On pose  $L_0^2(M(\mathbb{Q})\backslash M, \chi)$  l'espace de Hilbert de toutes les  $L^2$ -fonctions  $\phi$  sur  $M(\mathbb{Q})\backslash M$  qui se transforment selon  $\chi$  et de plus

$$\int_{N_M(\mathbb{Q})\backslash N_M(\mathbb{A}_\mathbb{Q})} \phi(nm) dn = 0$$

où  $N_M$  est le radical unipotent d'un groupe parabolique propre  $P_M$ . L'espace  $L_0^2(M(\mathbb{Q})\backslash M)_\chi$  est appelé l'espace de  $\chi$ -formes cuspidales sur  $M$  et  $M$  agit sur lui par translations à droite. Cet espace se décompose de manière discrète en une somme directe de sous-espaces irréductibles dont chacun est appelé *sous-représentation cuspidale* de  $M$ . Soit  $\pi$  une telle représentation, alors la topologie de l'anneau des adèles entraîne une décomposition du type  $\pi = \otimes_v \pi_v$  et pour presque tout  $v \neq \infty$ , les  $\pi_v$  ont un vecteur fixe par  $M_v(O_v)$  (c'est-à-dire la représentation  $\pi_v$  est non ramifiée pour presque tout  $v$ ), où  $M_v$  dénote  $M$  considéré comme groupe sur  $\mathbb{Q}_v$ . La représentation  $\pi_v$  est déterminée uniquement par une classe de conjugaison semisimple dans  $\widehat{M}$ .

<sup>1</sup>Bien entendu, toutes ces définitions sont faites dans le cadre plus général d'un groupe réductif défini sur un corps de nombres  $F$

## 1.6 Séries d'Eisenstein

Notre but est de construire des formes automorphes d'un type particulier à l'aide des séries d'Eisenstein. Les séries d'Eisenstein dépendent des variables complexes  $s_i \in \mathbb{C}$ . Pour cette raison, notre objet de travail est la représentation modifiée (tordue par un caractère non ramifié) :

$$\pi \otimes s := \pi \otimes |\det(g)|^s, \quad s \in \mathbb{C} \quad (1.2)$$

Pour notre groupe de Levi  $M \simeq GL_2 \times GL_2 \subset G$ , on va considérer des représentations cuspidales  $\pi_1$  et  $\pi_2$  de  $GL_2$ . Après avoir tordu par le caractère non ramifié, on a une représentation de  $M$  donnée par :

$$\Pi := \pi_1 \otimes s_1 \otimes \pi_2 \otimes s_2 \quad (1.3)$$

où  $s_i \in \mathbb{C}$ . Finalement on va considérer la représentation induite normalisée (pour les détails voir [Cas], paragraphe 3.1, page 32)

$$Ind_P^G(\Pi) := I_P$$

Notre représentation se décompose en produit tensoriel  $I_P = \bigotimes_v I_{P,v}$ . Si  $\phi$  est une fonction dans l'espace de  $I_P$ , la série d'Eisenstein qui sera définie ci-dessous nous donne une forme automorphe  $\in A(U(\mathbb{A})M(\mathbb{Q})\backslash G)$  (bien sûr dans le domaine de convergence absolue). Pour un caractère  $\chi$  de  $Z_M$ , le centre de  $M$ , notons  $\Pi_0(M)_\chi$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de  $M$  qui interviennent comme sous-module de  $A_0(M(\mathbb{Q})\backslash M)_\chi$ . Pour  $\pi \in \Pi_0(M)_\chi$  notons  $A_0(M(\mathbb{Q})\backslash M)_\pi$  la composante isotypique de type  $\pi$  de  $A_0(M(\mathbb{Q})\backslash M)_\chi$ , réduite à une copie de  $\pi$  par multiplicité 1. Soit  $\pi$  une représentation automorphe irréductible de  $M$ . Soit  $\phi \in A(U(\mathbb{A})M(\mathbb{Q})\backslash G)_\pi$ . On définit, lorsque la série converge, une fonction sur  $G(\mathbb{Q})\backslash G$  par

$$E(\phi_\pi, \pi)(g) = \sum_{\gamma \in P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})} \phi_\pi(\gamma g) \quad (1.4)$$

Nous avons le résultat suivant concernant la convergence des séries d'Eisenstein.

**Proposition 1.6.1.** *Il existe un cône ouvert positif de  $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^*$  tel que pour  $\pi$  de partie réelle assez grande (définie dans 1.3.1), contenue dans ce cône, la série définissant  $E(\phi_\pi, \pi)(g)$  converge normalement pour  $g$  dans un ensemble compact. Si la représentation  $\pi$  est unitaire cuspidale, la série (1.4) converge dans le cône suivant  $\mathcal{C}$  :*

$$\mathcal{C} = \{s \in \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^* \mid \langle s, \hat{\alpha} \rangle > \langle \rho_P, \hat{\alpha} \rangle, \alpha \in R^+(T_M, G)\}$$

*Démonstration.* Voir [M-W95], II.1.5, proposition. □

Rappelons qu'une représentation  $\pi$  de  $G$  irréductible admissible est dite *tempérée* s'il existe un sous-groupe parabolique  $P = MN$  et une représentation de

carré intégrable  $\delta$  de  $M$  telle que  $\pi$  soit équivalente à une sous-représentation de  $Ind_P^G(\delta)$ . Dans notre cas particulier, pour une représentation cuspidale unitaire, d'après le calcul de  $\rho_P = 5X + Y$ , nous avons convergence de la série d'Eisenstein (1.4) pour  $s = (\sigma_1, \sigma_2)$  avec  $\sigma_1 > 5$  et  $\sigma_2 > 1$ .

On va construire une représentation résiduelle à l'aide des séries d'Eisenstein et on veut vérifier que cette représentation est donnée par un paramètre d'Arthur que l'on a considéré dans l'introduction : une représentation  $\psi : L_{\mathbb{Q}} \times SL_2 \rightarrow \widehat{SO}_8(\mathbb{C})$ , où  $\psi = r_2 \otimes sp_4$ , avec  $r_2$  est la représentation associée à  $\pi$  et  $sp_4$  est la représentation irréductible de dimension 4 de  $SL_2$ . Alors la matrice en la place  $p$  de l'image de  $\psi$  a la forme suivante à conjugaison près :

$$t_{\pi,p} = \begin{pmatrix} tp^{\frac{3}{2}} & & & & & & & \\ & t^{-1}p^{\frac{3}{2}} & & & & & & \\ & & tp^{\frac{1}{2}} & & & & & \\ & & & t^{-1}p^{\frac{1}{2}} & & & & \\ & & & & tp^{-\frac{1}{2}} & & & \\ & & & & & t^{-1}p^{-\frac{1}{2}} & & \\ & & & & & & tp^{-\frac{3}{2}} & \\ & & & & & & & t^{-1}p^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

## 1.7 Opérateurs d'entrelacement

Soient  $M, M'$  sous-groupes de Levi des groupes paraboliques standard  $P$  et  $P'$ , de radicaux unipotents  $U$  et  $U'$ . Supposons encore que  $wMw^{-1} = M'$  (en fait, cette condition entraîne  $M = M'$  dans notre cas comme on l'a déjà remarqué). Soit  $\pi$  un représentation automorphe irréductible et  $\phi_\pi$  un élément de  $A(U(\mathbb{A})M(\mathbb{Q}) \backslash \pi)$ , pour  $g \in G$  on pose, lorsque l'intégrale ci-dessous converge

$$M(w, \pi, s)\phi_\pi(g) = \int_{U'(\mathbb{Q}) \cap wU(\mathbb{Q})w^{-1} \backslash U'(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})} \phi_\pi(w^{-1}ug) du \quad (1.6)$$

et on appelle  $M(w, \pi, s)\phi_\pi$  *opérateur d'entrelacement*, dépendant de  $w, \pi$  et la variable complexe  $s$ . Ces opérateurs entrelacent la représentation induite :

$$M(w, s) : I_P(\pi, s) \rightarrow I_P(w\pi, ws)$$

On doit remarquer que les pôles de  $M(w, \pi)\phi_\pi$  sont exactement le même que ceux des termes constants de la série d'Eisenstein (1.4) (voir par exemple [Lan71]).

### 1.7.1 Fonctions $L$ et opérateurs d'entrelacement

Oubliant un instant les notations précédents, soit  $G$  un groupe réductif déployé sur  $\mathbb{Q}$  et  $P = MN \subset G$  un sous-groupe parabolique maximal. Soit  $\pi = \otimes_v \pi_v$  une représentation cuspidale de  $M(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ . Comme on l'a vu, on a le parabolique

dual  $\widehat{P} = \widehat{M}\widehat{N} \subset \widehat{G}$ . Le groupe  $\widehat{M}$  opère naturellement par l'action adjointe sur  $Lie(\widehat{N}) = \mathfrak{n}$ . Soit  $r$  cette représentation. Si  $S$  est un ensemble fini de places (contenant les places archimédiennes) hors duquel  $\pi$  est non ramifiée, on considèrera la fonction  $L$  partielle

$$L^S(\pi, r, s) = \prod_{v \notin S} \det(1 - r(A_v)q_v^{-s})^{-1} \quad (1.7)$$

où  $A_v$  est la classe de conjugaison associée à la représentation  $\pi$ . Cette fonction  $L$  partielle est convergente, d'après Langlands, pour  $Re(s)$  assez grande.

**Exemple 1.7.1.** Soit  $G = GL_{m+n}$ ,  $M = GL_m \times GL_n$  et  $N = M_{m \times n}$ . Soit  $\pi_1$  une représentation irréductible de  $M$  et  $\pi_2$  une représentation irréductible de  $N$ . Alors  ${}^L M = GL_m(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C})$  agit sur  $M_{m \times n}(\mathbb{C})$  par  $r(g_1, g_2) = g_1 X g_2^{-1}$ . La représentation  $r$  est alors irréductible et nous avons une fonction  $L$  de Rankin-Selberg.

D'après Langlands (voir [Bor79] et [Lan71]) cette fonction  $L$  donne (dans les places non ramifiées) l'action de l'opérateur d'entrelacement, associé à l'unique élément  $w$  du groupe de Weyl relatif de  $(G, M)$  dans l'induite  $Ind_P^G(\pi)$ .

Choisissons un ensemble fini  $S$  de places de  $k$  tel que  $\pi_v$  soit non ramifiée en dehors de  $S$ . Alors la représentation locale  $\pi_v$  est uniquement déterminée par une classe de conjugaison semisimple  $A_v$  dans  ${}^L M_v = {}^L M$ ,  $M$  étant déployé. Pour chaque représentation  $r$  complexe de dimension finie de  ${}^L M$  il existe une fonction  $L$  de Langlands  $L(s, \pi_v, r)$ , définie par

$$L^S(s, \pi_v, r) = \prod_{v \notin S} \det(I - r(A_v)q_v^{-s})^{-1}$$

## 1.8 Calcul des opérateurs d'entrelacement pour $SO_8$

On peut commencer à décrire les opérateurs d'entrelacement. Rappelons que dans ce cas, nous n'avons que deux sous-groupes de Levi de corang 1, à dire,  $M_{\alpha_2}$  le sous-groupe de Levi engendré par les racines  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$ . Soit  $M_{\alpha_4}$  le sous-groupe de Levi engendré par  $\alpha_1, \alpha_3$ , et  $\alpha_4$ . Les opérateurs d'entrelacement admettent un développement en produit tensoriel. En fait on peut écrire l'opérateur

$$M(w, s) = M^S(w, s)M_S(w, s)$$

où  $M^S(w, s)$  est le produit dans les places non ramifiées des opérateurs d'entrelacement locaux et  $M_S(w, s)$  est le produit des opérateurs d'entrelacement en les places ramifiées et archimédiennes contenues dans  $S$ .

Pour chaque racine simple  $\alpha \in R(T_M, G)$  on a une symétrie élémentaire associée  $w_\alpha$ . Si on considère le groupe  $M_\alpha \supset M$  (défini dans la section 1.3.1), alors l'opérateur  $M(w_\alpha, \pi)$  peut être vu comme l'induit d'un opérateur défini sur l'espace de fonctions  $A((U(\mathbb{A})M(\mathbb{Q}) \cap M_\alpha \backslash M_\alpha)_\pi)$ , autrement dit, l'opérateur d'entrelacement "se passe" dans  $M_\alpha$  (pour les détails voir la démonstration de la proposition dans §II.1.6, page 90 de [M-W95]).

D'abord on va calculer l'opérateur d'entrelacement (pour les places non ramifiées) associé à la symétrie élémentaire  $w_1$ . Le groupe de Levi correspondant  $M_{\alpha_2}$  est isomorphe à  $GL_4$  Soient  $\pi_1$  et  $\pi_2$  représentations cuspidales automorphes de  $GL_2$ . Donc nous avons une représentation  $\Pi$  de  $GL_2 \times GL_2$  donné par (1.3), où  $\pi_i \otimes s_i$  on rappelle est  $\pi_i \otimes |det(g)|^{s_i}$ .

On sait que  $\pi_i = ind_B^G(\chi_i, \chi'_i)$  avec des caractères non ramifiés  $\chi_i, \chi'_i$ . On considère pour l'instant des représentations non ramifiées. L'opérateur d'entrelacement associé à  $M_{\alpha_2}$  est un quotient des fonctions  $L$  de Rankin-Selberg de  $\widehat{GL}_2 \times \widehat{GL}_2 \subset \widehat{GL}_4$ . Le parabolique associé est formé de matrices

$$\begin{pmatrix} A & C \\ & B \end{pmatrix};$$

$C \in \widehat{N}$  le radical unipotent. L'opérateur d'entrelacement se passe dans  $GL_4$  et l'action sur l'algèbre de Lie de  $\widehat{N}$  est donnée par la conjugaison. On arrive à l'exemple 1.7.1

Par conséquent d'après l'action sur l'algèbre de Lie de  $\widehat{N}$  on aura une représentation  $r(g_1, g_2) \mapsto r_1(g) \otimes r_2(g)^*$ . La fonction  $L$  partielle (on ne tient en compte que les places ramifiées) est :

$$L^S = \prod det(1 - r_1(t_{1,p}(\pi_1 \otimes s_1)) \otimes r_2^*(t_{2,p}(\pi_2 \otimes s_2)))^{-1}$$

où  $r_2^*$  dénote la représentation contragrédiente de  $r_2$ . Par suite l'opérateur d'entrelacement  $M^S(w_{\alpha_2}, \Pi)$  est

$$M^S(w_{\alpha_2}, \Pi) = \frac{L^S(s_1 - s_2, \pi_1 \otimes \pi_2^\vee)}{L^S(1 + s_1 - s_2, \pi_1 \otimes \pi_2^\vee)} \quad (1.8)$$

où  $\pi^\vee$  est la représentation contragrédiente de  $\pi$  et ce quotient devient  $L^S(s_1 - s_2, \pi \otimes \pi^\vee) / L^S(1 + s_1 - s_2, \pi \otimes \pi^\vee)$  dans le cas particulier où  $\pi_1 = \pi_2 = \pi$ .

Faisons le calcul pour l'opérateur associé à  $w_{\alpha_4}$ . On remarque que le sous-groupe de Levi correspondant  $M_{\alpha_4}$  est isomorphe à  $GL_2 \times SO_4$ . On a

$$\widehat{GL}_2 \times \widehat{GL}_2 \subset \widehat{GL}_2 \times \widehat{SO}_4$$

La première conséquence est que dans le premier facteur l'opérateur d'entrelacement est constant, et donc tout le opérateur d'entrelacement "se passe" dans le deuxième facteur  $\widehat{SO}_4$ . On fixe un plongement de  $\widehat{GL}_2$  dans  $\widehat{SO}_4$  et on trouve alors que l'action non triviale sur l'algèbre de Lie de radical unipotent de  $\widehat{N}$  est exactement  $det(g_2)$ .

Par conséquent  $r(g_1, g_2) \mapsto det(g_2)$ . Donc la fonction  $L$  partielle est  $L_S = L(\pi_2 \otimes s_2, det) = L(\chi_{\pi_2}, 2s_2)$ , où  $\chi_{\pi_2} = \chi_2$  est le caractère central de  $\pi_2 \otimes s_2$ . Donc l'opérateur donné pour  $M^S(w_{\alpha_4}, \Pi)$  est

$$M^S(w_{\alpha_4}, \Pi) = \frac{L^S(\chi_2, 2s_2)}{L^S(\chi_2, 1 + 2s_2)} \quad (1.9)$$

On procède maintenant au calcul des autres opérateurs. On sait que ([M-W95], remarque page 91)

$$M_{w_2 w_1} = M(w_2, w_1 \Pi) M(w_1, \Pi)$$

Le dernier facteur est connu, et il suffit de trouver  $M(w_2, w_1 \Pi)$ . D'après nos calculs  $w_1 = (1, 2)(1, 1)$ . Donc l'action est la suivante :  $(a_1, a_2) \mapsto (a_2, a_1)$ , c'est-à-dire  $\pi_1 \otimes s_1 \otimes \pi_2 \otimes s_2 \mapsto \pi_2 \otimes s_2 \otimes \pi_1 \otimes s_1$ . Par suite

$$M^S(w_2, w_1 \Pi) = M^S(w_2, \pi_2 \otimes s_2 \otimes \pi_1 \otimes s_1) = \frac{L^S(\chi_1, 2s_1)}{L^S(\chi_1, 1 + 2s_1)}$$

Donc l'opérateur correspondant est :

$$M_{w_2 w_1}^S = \frac{L^S(\chi_1, 2s_1)}{L^S(\chi_1, 1 + 2s_1)} \times \frac{L^S(s_1 - s_2, \pi_1 \otimes \pi_2^\vee)}{L^S(1 + s_1 - s_2, \pi_1 \otimes \pi_2^\vee)} \quad (1.10)$$

De la même manière on a  $M_{w_1 w_2} = M(w_1, w_2 \Pi) M(w_2, \Pi)$ . On connaît aussi le dernier facteur. L'élément  $w_2 = 1(1, -1)$ . À conjugaison près nous avons :  $(a_1, a_2) \mapsto (a_1, a_2^{-1})$ . Donc  $\pi_1 \otimes s_1 \otimes \pi_2 \otimes s_2 \mapsto \pi_1 \otimes s_1 \otimes \pi_2^\vee \otimes -s_2$ . Alors

$$M^S(w_1, w_2 \Pi) = M^S(w_1, \pi_1 \otimes s_1 \otimes \pi_2^\vee \otimes -s_2)$$

L'expression de l'opérateur est :

$$M_{w_1 w_2}^S = \frac{L^S(s_1 + s_2, \pi_1 \otimes \pi_2)}{L^S(1 + s_1 + s_2, \pi_1 \otimes \pi_2)} \times \frac{L^S(\chi_2, 2s_2)}{L^S(\chi_2, 1 + 2s_2)} \quad (1.11)$$

On a  $M_{w_1 w_2 w_1} = M(w_1, w_2 w_1 \Pi) M(w_2, w_1 \Pi) M(w_1, \Pi)$ , où il reste à calculer le premier facteur. Nous avons  $w_2 w_1 = (1, 2)(-1, 1)$ . Donc, à conjugaison près nous avons une action  $(a_1, a_2) = (a_2, a_1^{-1})$  et l'action sur la représentation nous donne  $\pi_1 \otimes s_1 \otimes \pi_2 \otimes s_2 \mapsto \pi_2 \otimes s_2 \otimes \pi_1^\vee \otimes (-s_1)$ . Le facteur partiel associée est alors

$$M^S(w_1, w_2 w_1 \Pi) = L^S(s_2 + s_1, \pi_2 \otimes \pi_1) / L^S(1 + s_2 + s_1, \pi_2 \otimes \pi_1)$$

L'expression pour cet opérateur est :

$$\begin{aligned} M_{w_1 w_2 w_1}^S &= \frac{L^S(s_2 + s_1, \pi_2 \otimes \pi_1)}{L^S(1 + s_2 + s_1, \pi_2 \otimes \pi_1)} \times \frac{L^S(\chi_1, 2s_1)}{L^S(\chi_1, 1 + 2s_1)} \times \\ &\times \frac{L^S(s_1 - s_2, \pi_1 \otimes \pi_2^\vee)}{L^S(1 + s_1 - s_2, \pi_1 \otimes \pi_2^\vee)} \end{aligned} \quad (1.12)$$

$M_{w_2 w_1 w_2} = M(w_2, w_1 w_2 \Pi) M(w_1, w_2 \Pi) M(w_2, \Pi)$ , où de nouveau on connaît déjà les deux derniers termes. Pour calculer le dernier on considère alors  $w_1 w_2 = (1, 2)(1, -1)$ . À conjugaison près le résultat est  $(a_1, a_2) \mapsto (a_2^{-1}, a_1)$ . Ceci nous donne  $\pi_1 \otimes s_1 \otimes \pi_2 \otimes s_2 \mapsto \pi_2^\vee \otimes (-s_2) \otimes \pi_1 \otimes s_1$ . Le facteur partiel associé est

$$M^S(w_2, \pi_2^\vee \otimes (-s_2) \otimes \pi_1 \otimes s_1) = \frac{L^S(\chi_1, 2s_1)}{L^S(\chi_1, 1 + 2s_1)}$$



On écrit l'opérateur d'entrelacement comme :

$$\begin{aligned} M_{w_2 w_1 w_2}^S &= \frac{L^S(\chi_1, 2s_1)}{L^S(\chi_1, 1 + 2s_1)} \times \frac{L^S(s_1 + s_2, \pi_1 \otimes \pi_2)}{L^S(1 + s_1 + s_2, \pi_1 \otimes \pi_2)} \times \\ &\times \frac{L^S(\chi_1, 2s_1)}{L^S(\chi_1, 1 + 2s_1)} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Finalement, pour calculer le dernier opérateur on doit considérer le produit  $M_{w_0} = M(w_1, w_2 w_1 w_2 \Pi) M(w_2, w_1 w_2 \Pi) M(w_1, w_2 \Pi) M(w_2, \Pi)$ . On remarque aussi que  $M_{w_1 w_2 w_1 w_2} = M_{w_2 w_1 w_2 w_1}$ , car

$$w_1 w_2 w_1 w_2 = w_2 w_1 w_2 w_1 = w_0 = 1(-1, -1)$$

Alors, on considère l'élément  $w_2 w_1 w_2 = (1, 2)(-1, -1)$ . Nous obtenons, bien sûr, à conjugaison près  $(a_1, a_2) \mapsto (a_2^{-1}, a_1^{-1})$ , qui nous donne  $\pi_1 \otimes s_1 \otimes \pi_2 \otimes s_2 \mapsto \pi_2^\vee \otimes -(s_2) \otimes \pi_1^\vee \otimes -(s_1)$ . Donc on trouve

$$\begin{aligned} M^S(w_1, w_2 w_1 w_2 \Pi) &= M^S(w_1, \pi_2^\vee \otimes -(s_2) \otimes \pi_1^\vee \otimes -(s_1)) \\ &= L^S(s_1 - s_2, \pi_2^\vee \otimes \pi_1) / L^S(1 + s_1 - s_2, \pi_2^\vee \otimes \pi_1) \end{aligned}$$

Enfin, l'expression du dernier opérateur d'entrelacement est :

$$\begin{aligned} M_{w_0}^S &= \frac{L^S(s_1 - s_2, \pi_2^\vee \otimes \pi_1)}{L^S(1 + s_1 - s_2, \pi_2^\vee \otimes \pi_1)} \times \frac{L^S(\chi_1, 2s_1)}{L^S(\chi_1, 1 + 2s_1)} \times \\ &\times \frac{L^S(s_1 + s_2, \pi_1 \otimes \pi_2)}{L^S(1 + s_1 + s_2, \pi_1 \otimes \pi_2)} \times \frac{L^S(\chi_2, 2s_2)}{L^S(\chi_2, 1 + 2s_2)} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Comme on l'a vu ces opérateurs prennent en compte seulement les places non ramifiées. La représentation  $\Pi = \pi_1 \otimes s_1 \otimes \pi_2 \otimes s_2$  est non ramifiée pour toute  $v \notin S$ .

Alors on peut décrire les termes constants pour ce groupe parabolique  $P$ , c'est-à-dire le terme  $E_P(\phi_\pi, \pi)$ , dans le domaine de convergence. Pour cela on revient au théorème de [M-W95], page 93 :

**Théorème 1.8.1.** *Soit  $\pi$  une classe d'équivalence d'une représentation de  $M$  telle que nous avons convergence pour la série d'Eisenstein  $E(\phi_\pi, \pi)$ . Si  $P' = M'U'$  est un groupe parabolique standard (de Levi  $M'$ ) alors : si  $M'$  est conjugué de  $M$*

$$E_{P'}(\phi_\pi, \pi) = \sum_{\substack{w \in W(M) \\ wMw^{-1} = M'}} M(w, \pi) \phi_\pi$$

Une question naturelle, est savoir qu'est-ce qu'il se passe avec les termes constants par rapport aux autres groupes paraboliques  $P'$  et leurs termes  $E_{P'}(\phi_\pi, \pi)$ . La réponse est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 1.8.2.** Soit  $\pi$  une représentation, avec  $Re(\pi)$  assez grande et soit  $\phi_\pi$  une forme automorphe dans l'espace de  $\pi$ . Supposons que  $Re(\pi)$  est assez grande pour que la série d'Eisenstein  $E(\phi_\pi, \pi)$  converge. Soit  $P' = M'N'$  un sous-groupe parabolique standard avec sous-groupe de Levi  $M'$  et radical unipotent  $N'$ . On note  $E_{P'}(\phi_\pi, \pi)$  le terme constant de  $E(\phi_\pi, \pi)$  le long de  $P'$ . Alors

$$E_{P'}(\phi_\pi, \pi) = \sum_{w \in W(M, M')} E^{M'}(M(w, \pi)\phi_\pi, w\pi)$$

où  $W(M, M') = \{w \in W \mid w^{-1}(\alpha) > 0, \text{ pour tout } \alpha \in R^+(T_0, M') \text{ et } wMw^{-1} \text{ est un sous-groupe de Levi standard de } M'\}$ . Ce terme constant est nul si  $W(M, M') = \emptyset$ .

*Démonstration.* Voir [M-W95] page 93 pour la démonstration et la définition de  $E^{M'}$ .  $\square$

**Remarque 1.8.3.** Si l'on analyse l'ensemble  $W(M, M')$ , la condition  $wMw^{-1}$  est un sous-groupe de Levi standard de  $M'$  entraîne  $M' = M$ , comme on l'a déjà vu. Alors la conclusion est la suivante :

1. Si  $P'$  est tel que  $M' = M$ , les termes constants sont les mêmes que pour  $P = MN$ .
2. Si  $P'$  est tel que  $M' \neq M$ , alors les termes constants sont nuls parce que  $W(M, M') = \emptyset$  car  $M$  et  $M'$  ne sont pas conjugués par le groupe de Weyl.

## 1.9 Résidus des séries d'Eisenstein

Rappelons qu'à une représentation  $\pi$  automorphe irréductible on a associé un caractère noté  $Re\pi$  qui est un élément de  $\mathfrak{a}_M^*$ , il suffit d'identifier le caractère  $|\chi_\pi|$  (le caractère central de  $\pi$ ) à un élément de  $\mathfrak{a}_M^*$ . Pour  $\phi$  une forme automorphe, l'ensemble

$$\mathfrak{E}_\pi = \{\chi_\pi \mid \pi \in \Pi_0(M, \phi)\}$$

est appelé l'ensemble des exposants cuspidaux pour  $\phi$  (voir [M-W95] pour la définition précise de  $\Pi_0(M, \phi)$ ). On va rappeler un critère pour déterminer si une fonction qui provient d'une forme automorphe est de carré intégrable d'après son exposant cuspidal :

**Proposition 1.9.1.** Soit  $\xi$  un caractère unitaire de  $Z_G$  et  $\phi \in A(G(k) \backslash G)_\xi$ . Pour tout sous-groupe parabolique standard  $P = MN$  de  $G$  soit  $\Pi_0(M, \phi)$  le support cuspidal de  $\phi$  le long de  $P$ . Alors,  $\phi$  est de carré intégrable si et seulement si pour tout  $P = MN$  et tout  $\pi \in \Pi_0(M, \phi)$ , le caractère  $Re\pi$  s'écrit sous la forme

$$Re\pi = \sum_{\alpha \in \Delta_M} x_\alpha \alpha$$

avec des coefficients  $x_\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x_\alpha < 0$ .

On va analyser les pôles et zéros des quotients des 8 termes constants de la série d'Eisenstein construite. Pour cela on fera des hypothèses particulières :

1.  $\pi_1 = \pi_2$ .
2.  $\chi_{\pi_1} = \chi_{\pi_2} = 1$ , le caractère central est trivial.

De manière que si la matrice  $\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$  représente à  $\pi$ , alors  $t_1 t_2 = 1$  et par conséquent  $\pi \simeq \pi^\vee$  (la représentation est autoduale) car la matrice de  $\pi^\vee$  est  $\begin{pmatrix} t_1^{-1} & 0 \\ 0 & t_2^{-1} \end{pmatrix}$ . La conséquence est que les quotients de fonctions  $L$  que l'on avait considéré auparavant prennent la forme :

$$\frac{L^S(\chi_i, 2s_i)}{L^S(\chi_i, 1 + 2s_i)} = \frac{\zeta^S(2s_i)}{\zeta^S(1 + 2s_i)}$$

et

$$\frac{L^S(s_1 - s_2, \pi_2^\vee \otimes \pi_1)}{L^S(1 + s_1 - s_2, \pi_2^\vee \otimes \pi_1)} = \frac{L^S(s_1 - s_2, \pi \otimes \pi)}{L^S(1 + s_1 - s_2, \pi \otimes \pi)}$$

On va analyser les pôles et zéros de ces quotients au point  $s_0 = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ . On va étudier ce point  $s_0$  car il est très lié à la représentation triviale et plus tard on analysera les valeurs propres des matrices de Hecke. Nous avons les faits suivants au point  $s_0$  :

1. On a  $s_1 - s_2 = 1$ .
2. Pour tout  $i = 1, 2$  on a  $2s_i \geq 1$  avec égalité si et seulement si  $i = 2$ .
3. Les termes  $s_1 + s_2, 1 + s_1 - s_2$  et  $1 + s_1 + s_2$  sont toujours  $\geq 2$ .

Les termes résiduels donc sont donnés par  $s_1 - s_2 = 1$  et  $2s_2 = 1$ , qui apparaissent seulement dans le numérateur, et avec des résidus simples en  $\frac{1}{s_1 - s_2 - 1}$  et  $\frac{1}{s_2 - 1/2}$ . Donc il n'y pas de pôles dans le dénominateur. Par conséquent les termes qui donnent de pôle au point  $s_0$  sont

$$\frac{L^S(s_1 - s_2, \pi \otimes \pi)}{L^S(1 + s_1 - s_2, \pi \otimes \pi)} \quad \text{et} \quad \frac{\zeta^S(2s_2)}{\zeta^S(1 + 2s_2)}$$

Alors  $M(w_0, \pi)$  a exactement deux résidus simples le long des droites  $s_1 = 3/2$  et  $s_2 = 1/2$ . Et les autres termes de longueur plus petite auront au plus un pôle simple au point  $s_0$ .

On va considérer maintenant la série de Eisenstein modifiée

$$E_P^*(\phi, s) = (s_1 - s_1^0)(s_2 - s_2^0)E_P(\phi, s) = (s_1 - \frac{3}{2})(s_2 - \frac{1}{2})E_P(\phi, s) \quad (1.15)$$

On utilise le fait que les pôles des séries de Eisenstein sont ceux de ces termes constants (voir [Lan71]). Si on regarde un par un les 8 termes constants partiels, pour tout  $w \in W(M)$ , au point  $s_0 = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ , ils ont au plus un pôle simple sauf celui que correspond à l'élément de plus grand longueur. De même les pôles qui apparaissent dans ces 8 termes sont inclus dans l'élément de plus grand longueur, alors les produit  $(s_1 - s_1^0)(s_2 - s_2^0)$  annule tous les termes constants

partiels sauf celui de plus grand longueur et maintenant la série (1.15) n'est pas nulle dans le point  $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ , en effet si on considère la limite

$$\lim_{s \rightarrow s_0} (s_1 - s_1^0)(s_2 - s_2^0)E_P(\phi, s) \neq 0$$

es non nulle car d'après des résultats bien connus sur les fonctions  $L$  et la fonction  $\zeta$  les résidus sont non nuls et par conséquent la limite non plus. Donc on a bien un résidu au le point  $s_0 = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ . Notre but maintenant est démontrer que  $E_P^*(\phi, s) \in L^2(G(\mathbb{Q}) \backslash G)$ . Pour cela on va calculer les exposant cuspidaux. Rappelons que l'on a tordu notre représentation par des caractères non ramifiés, de telle manière que nous avons la représentation  $\Pi = \pi_1 \otimes s_1 \otimes \pi_2 \otimes s_2$ . Donc son caractère central est  $|det(g)|^{2(s_1)} \otimes |det(g)|^{2(s_2)}$ , car le caractère central de  $\pi \otimes \eta$  est  $\chi_\pi \eta^2$ , où  $\eta$  est un caractère. On obtient alors pour la partie réelle  $Re\Pi = 2s_1X + 2s_2Y$ . On va considérer seulement la partie réelle de ce caractère. L'élément  $w_0$  de plus grande longueur de groupe de Weyl agit sur le paramètre  $s_0$  comme ceci :

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{w_0} \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Pour vérifier le critère nous avons l'équation suivant :

$$(-3, -1) = \alpha(1, -1) + \beta(0, 2)$$

D'où  $\alpha = -3$  et  $\beta = -2$ , donc  $\alpha, \beta < 0$ . Par suite  $E_P^*(\phi, s)$  est de carré intégrable et donc fait partie du spectre discret, par 1.9.1. Finalement vérifions que la partie non ramifiée du résidu est donnée par un paramètre d'Arthur. Puisque  $M \subset P \subset G$  on a  $\widehat{M} \subset \widehat{G}$ . Le paramètre  $\psi : L_{\mathbb{Q}} \times SL_2$  donné par  $r_2 \otimes sp_4$  est un paramètre d'Arthur dont l'image est dans  $\widehat{SO}_8$  et on rappelle qu'il donne la matrice de Hecke

$$t_{\pi, p} = \begin{pmatrix} tp^{\frac{3}{2}} & & & & & & & \\ & t^{-1}p^{\frac{3}{2}} & & & & & & \\ & & tp^{\frac{1}{2}} & & & & & \\ & & & t^{-1}p^{\frac{1}{2}} & & & & \\ & & & & tp^{-\frac{1}{2}} & & & \\ & & & & & t^{-1}p^{-\frac{1}{2}} & & \\ & & & & & & tp^{-\frac{3}{2}} & \\ & & & & & & & t^{-1}p^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

On a vérifié l'existence d'une représentation résiduelle de carré intégrable qui est donnée par un paramètre elliptique d'Arthur pour le groupe  $SO_8(\mathbb{Q})$ .

Maintenant il nous reste compléter l'argument pour les places ramifiées et archimédiennes. On verra que ces places ne contribuent ni de zéros ni pôles, donc nous avons trouvé une représentation  $\Pi$  qui appartient au spectre discret.

## 1.10 Holomorphie et non nullité des opérateurs d'entrelacement

On va traiter dans cette section d'abord le cas  $v$  fini et puis le cas où  $v$  est la seule place à l'infini. Rappelons que dans le cas de  $GL_2$  de  $k$  avec  $k$  corps  $p$ -adique, nous avons une caractérisation bien connue des séries principales. Si on considère l'espace des fonctions lisses  $f : GL_2 \rightarrow \mathbb{C}$  qui satisfont

$$f\left(\begin{pmatrix} y_1 & x \\ & y_2 \end{pmatrix} g\right) = \left|\frac{y_1}{y_2}\right|^{1/2} \chi_1(y_1)\chi_2(y)f(g)$$

où  $\chi_1$  et  $\chi_2$  sont des caractères de  $k^\times$  et on suppose que  $\chi_1\chi_2^{-1}$  n'est pas identiquement égal au caractère  $y \mapsto |y|$  ou  $y \mapsto |y|^{-1}$ . Le groupe  $GL_2(k)$  agit sur cet espace via translation à droite et la représentation qui résulte est notée  $\pi(\chi_1, \chi_2)$ . On a

$$\pi(\chi_1, \chi_2) \simeq \pi(\chi_2, \chi_1)$$

Dans le cas où  $\chi_1$  et  $\chi_2$  sont non ramifiés, la série principale  $\pi(\chi_1, \chi_2)$  est irréductible et on l'appelle série principale sphérique ou série principale non ramifiée. Soit  $\varpi$  une uniformisante du corps local  $k$ . Supposons  $\chi_1$  et  $\chi_2$  non ramifiés et soient  $\chi_1(\varpi) = a_1$  et  $\chi_2(\varpi) = a_2$  les paramètres de Satake. Si  $\pi(\chi_1, \chi_2)$  est unitaire alors, soit  $\chi_1$  et  $\chi_2$  sont unitaires, soit il existe une constante  $a$  de valeur absolue 1 et une constante réelle  $s$  satisfaisant  $-\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2}$  telle que  $a_1 = aq^s$  et  $a_2 = aq^{-s}$ , où  $q$  est l'ordre du corps résiduel. Les représentations du premier type ( $\chi_1, \chi_2$  unitaires) sont appelées séries principales tempérées et ceux du deuxième type sont appelées représentations de la série principale complémentaires.

**Remarque 1.10.1.** Il est conjecturé que les représentations de la série principale complémentaires n'apparaissent pas comme composantes des représentations automorphes (Conjecture de Ramanujan). Néanmoins, cette affirmation n'est pas encore démontrée.

On va vérifier l'holomorphie pour les places  $v$  où la représentation  $\pi_v$  est tempérée et puis pour les places où  $\pi_v$  est non tempérée. Pour ce cas, on aura besoin du théorème du quotient de Langlands  $p$ -adique, démontré par Silberger et Borel-Wallach.

**Théorème 1.10.2** (Silberger, Borel-Wallach). *Soit  $P = MN$  un sous-groupe parabolique de  $G$ , soit  $\sigma$  une représentation tempérée unitaire de  $M$  et soit  $\nu \in \mathfrak{a}$  (l'algèbre de Lie) telle que  $Re \nu$  est dans la chambre de Weyl positive. Alors la représentation induite  $Ind_P^G(\sigma, \nu)$  a un unique quotient irréductible  $J(P, \sigma, \nu)$  et  $J(P, \sigma, \nu)$  est isomorphe avec l'image de l'opérateur d'entrelacement  $A(\overline{P} : P, \sigma, \nu)$  sur  $Ind_P^G(\sigma, \nu)$ , où l'opérateur entrelace le sous-groupe parabolique  $P$  et le sous-groupe parabolique opposé  $\overline{P}$ .*

*Démonstration.* Voir [Sil78] ou [B-W99]. □

**Proposition 1.10.3.** *L'opérateur d'entrelacement pour la représentation  $\Pi$  du groupe  $SO_8$  construite auparavant, est holomorphe et non nul pour les places archimédiennes et ramifiées.*

*Démonstration.* On va analyser les possibles cas.

1. La représentation  $\pi_v$  est tempérée. Dénotons par  $M_v(w, \Pi)$  l'opérateur d'entrelacement local. Faisons le calcul pour  $w \neq w_0$ . Alors on sait que  $w$  admet une factorisation minimale (non unique) en facteurs  $w = w_{i_1} \cdots w_{i_k}$ . On peut décomposer cet opérateur en  $k$  facteurs. Chaque facteur  $M_v(w_i, w^i \Pi)$  est holomorphe car la représentation  $\Pi_v$  est tempérée et on se trouve en situation de Langlands soit pour le parabolique maximal  $GL_2 \times GL_2 \subset GL_4$  soit pour l'autre parabolique maximal  $GL_2 \times GL_2 \subset SO_4 \times GL_2$ . Plus précisément, on est dans le cas

$$Ind_{GL_2 \times GL_2}^P(\omega \otimes | \cdot |^s) \quad s \text{ réelle et } > 0$$

Comme  $s$  est réel et  $> 0$ , dans le cas  $p$ -adique Silberger et Borel-Wallach (voir [Sil78], [B-W99]) démontrent la convergence et donc l'holomorphie pour l'opérateur d'entrelacement (parabolique maximal). Notons finalement pour ce cas, vu que la représentation est tempérée, par le théorème 1.10.2 elle possède un unique quotient irréductible  $J(\omega \otimes | \cdot |^s)$  qui est l'image par l'opérateur d'entrelacement.

$$\begin{array}{ccc} Ind_{GL_2 \times GL_2}^P(\omega \otimes | \cdot |^s) & \xrightarrow{M_v} & Ind_{GL_2 \times GL_2}^P(\omega^w \otimes | \cdot |^{-s}) \\ & \searrow & \uparrow \\ & & J(\omega \otimes | \cdot |^s) \end{array}$$

La conséquence est que l'opérateur d'entrelacement est non nul.

Lorsque  $w = w_0$ , l'argument est essentiellement le même, on démontre l'holomorphie locale par étapes. On est encore dans une situation de Langlands pour le sous-groupe parabolique de Levi égal à  $GL_2 \times GL_2$  (rang relatif 1), donc justiciable du résultat de Langlands qui garanti sa convergence (et son holomorphie). L'opérateur est non nul d'après le calcul de Langlands pour ce parabolique, pour l'opérateur total. L'image de l'opérateur d'entrelacement est isomorphe au quotient de Langlands, qui est irréductible.

2. La représentation  $\pi_v$  est non tempérée. Supposons d'abord que  $\pi_v$  est sphérique ou non ramifiée. Rappelons que l'opérateur d'entrelacement est défini pour notre cas comme une intégrale

$$(M_v(w, \Pi)\phi_\Pi)(g) = \int_{N(\mathbb{Q}) \backslash N(\mathbb{A})} \phi_\Pi(w^{-1}ug) du : Ind_P^G(\Pi, s) \rightarrow Ind_P^G(w\Pi, ws)$$

Or on sait que l'opérateur d'entrelacement "se passe" dans le sous-groupe parabolique et donc il suffit de considérer l'opérateur comme

$$M_v(w, \Pi)\phi_\pi : Ind_{GL_2 \times GL_2}^{M'}(\Pi, s) \rightarrow Ind_{GL_2 \times GL_2}^{M'}(w\Pi, ws)$$

où  $M'$  est le sous-groupe de Levi  $GL_4$  ou bien  $GL_2 \times SO_4$ . On rappelle que dans notre cas  $\Pi$  est un produit tensoriel de deux représentations  $\pi$  tordues par un caractère non ramifié. Chaque  $\pi$  est autoduale et on peut la considérer comme une induite

$$\pi = \text{Ind}_B^{GL_2}(|\cdot|^\sigma, |\cdot|^{-\sigma})$$

où  $B$  est le sous-groupe de Borel évident dans  $GL_2$  consistant des matrices triangulaires supérieures. Alors par une induction par étages évidente on peut considérer l'opérateur d'entrelacement agissant sur une induite de 4 caractères que l'on va dénoter pour simplifier la notation, par  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$

$$M_v(w, \Pi)\phi_\pi : \text{Ind}_{B'_M}^{M'}(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) \rightarrow \text{Ind}_{B'_M}^{M'}(w\chi_1, w\chi_2, w\chi_3, w\chi_4)$$

Puisque  $\pi_v$  est sphérique il existe un vecteur non nul, disons  $e_v$ , fixé par le sous-groupe compact maximal  $K_{M'}$  qui appartient à cette induite. En fait on peut considérer l'opérateur dans ce cas sur  $K_{M'}/K_{M'} \cap B_{M'}$ . Ce qui entraîne la convergence de l'opérateur (au moins pour ce vecteur  $e_v$ ) car le calcul de Langlands donne un quotient de fonctions  $\frac{L(\sigma)}{L(\sigma+1)}$  avec  $\sigma < \frac{1}{2}$  et donc ce quotient converge absolument. Par suite l'opérateur est holomorphe, donné par une intégrale absolument convergente, pour la fonction  $e_v$ . Or, si on considère  $\phi_\Pi$  dans l'espace de cette induite on a

$$|\phi_\Pi| \leq C|e_v|$$

pour un constante réelle  $C \geq 0$ . Donc l'intégrale concernant  $\phi_\Pi$  est absolument majorée par l'intégrale de la fonction  $e_v$ , la dernière étant convergente entraîne la convergence de l'intégrale pour  $\phi_\Pi$ .

$$M_v(w, \Pi)\phi_\Pi \leq M_v(w, \Pi)e_v < \infty$$

Ce qui montre l'holomorphie de l'opérateur pour toute fonction dans l'induite. On a la non nullité de l'opérateur (sur  $e_v$ ) car les fonctions  $L$  ne s'annulent pas et il n'y a pas de pôles pour le dénominateur dans le point considéré.

On considère maintenant  $\pi_v$  non tempérée et ramifiée. Dans ce cas on a que  $\pi_v = \pi_0 \otimes \epsilon_v$ , où  $\pi_0$  est une représentation non ramifiée et  $\epsilon_v$  est un caractère ramifié d'ordre 2 ( $\epsilon_v^2 = 1$ ) (autodualité) et tel qu'il existe un caractère d'Artin (global) dont la composant  $v$  est  $\epsilon_v$ . Dans ce cas, nous avons l'holomorphie de l'opérateur d'entrelacement essentiellement par transport de structure et la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow \text{Spin}(SO_8) \longrightarrow SO_8 \longrightarrow F_v^\times / (F_v^\times)^2 \longrightarrow 1$$

En effet,  $\epsilon_v$  est un caractère de  $F_v^\times / (F_v^\times)^2$ . Or si  $\pi_v = \pi_0 \otimes \epsilon_v$ , alors on a

$$\text{Ind}_{GL_2 \times GL_2}^G(\pi_v \otimes s) = \text{Ind}_{GL_2 \times GL_2}^G(\pi_0 \otimes \epsilon_v \otimes s) = \text{Ind}_{GL_2 \times GL_2}^G(\pi_0 \otimes s) \otimes \epsilon_v$$

Ce qui nous ramène au cas précédent par transport de structure car l'action du caractère  $\epsilon_v$  n'affecte pas la convergence et non nullité de l'opérateur.

Faisons le cas où  $v = \infty$ . On a également deux cas pour  $\pi_\infty$ . Supposons que  $\pi_\infty$  est tempérée. Dans ce cas, nous avons le théorème du quotient de Langlands énoncé et démontré par lui même qui affirme l'existence d'un unique quotient irréductible. L'énoncé affirme de plus que ce quotient irréductible est l'image de l'induite sous l'opérateur d'entrelacement, ce qui nous ramène au même argument du cas  $p$ -adique. On en déduit la non nullité et la holomorphie de l'opérateur d'entrelacement pour le cas tempéré. Si  $\pi_\infty$  est non tempéré on peut procéder de la même manière. L'opérateur d'entrelacement on peut le considérer sur une représentation induite par étages, donc on a  $\pi_\infty = Ind_B^{GL_2}(|\cdot|^\sigma, |\cdot|^{-\sigma})$  avec  $-\frac{1}{2} < \sigma < \frac{1}{2}$ . L'hypothèse que l'on utilise fortement est que  $\sigma$  est petite et nous avons holomorphie pour  $\sigma$  assez petite dans ce cas nous avons fonctions  $\Gamma(s)$  et  $\Gamma(s + \sigma)$  que sont des fonctions holomorphes pour  $Re(s) > 0$  et non nulles. Par suite on obtient l'holomorphie et non nullité de cet opérateur d'entrelacement local.  $\square$

## 1.11 Existence d'un unique quotient pour $Ind_P^G(\Pi)$

Notons  $\mathcal{A}^2(SO_8)$  l'espace des formes automorphes de carré intégrale du groupe  $SO_8$ . Nous savons déjà que l'image de la représentation induite  $\Pi$  par  $E^*$  est dans  $\mathcal{A}^2(SO_8)$  par la proposition 1.9.1. Cette image dans  $\mathcal{A}^2(SO_8)$  est une somme discrète de représentations unitaires de  $G(\mathbb{A})$  (ou bien de  $G(F_v)$  pour tout  $v$ ). Par ailleurs, la représentation induite  $I = Ind_P^G(\Pi)$  se décompose comme un produit tensoriel  $I = \otimes_v I_v$  de représentations locales  $I_v$  (voir Flath [Fla79]). Il nous suffit donc de vérifier que tout facteur  $I_v$  s'envoie sur un unique quotient irréductible.

Si la composante locale de la représentation induisante  $\pi_v$  est tempérée, on sait que  $\Pi$  est en situation de Langlands (pour le parabolique de type  $GL_2 \times GL_2$  de rang relatif 1) et donc  $I_v$  a un unique quotient irréductible, par le théorème du quotient de Langlands.

Supposons  $\pi_v$  non tempérée ce qui veut dire sphérique à torsion près par un caractère d'ordre 2, cas que nous ramenons au cas sphérique pour l'argument donné plus haut (transport de structure). On va vérifier, d'après un théorème de Kato, que  $I_v$  est cyclique engendrée par son vecteur non ramifié  $e_v$ . Soit  $f$  l'image de  $e_v$ , ou plus correctement de  $e_v \otimes \phi^v$  où  $\phi^v \in \otimes_{w \neq v} I_w$ .

Considérons donc l'image de  $I_v \otimes \phi^v$  par  $E^*$ . Elle totalement réductible de la forme  $\oplus \pi_i$ , avec  $\pi_i$  irréductibles et la somme finie. De plus on a  $I_v^{K_v} = \mathbb{C}e_v$ , où  $K_v = G(O_v)$ . Donc exactement l'une des représentations  $\pi$ , disons  $\pi_0$ , est sphérique et  $E^*(e_v) = f \in \pi_0$ . Par cyclicité  $E^*(I_v) \subset \pi_0$ .

Globalement, on voit que  $E^*$  s'annule sur les sous-modules de Langlands (noyau de la flèche vers le quotient de Langlands) pour  $v$  tempérée, et sur le sous-module de Kato (noyau de la flèche vers le quotient sphérique irréductible) pour les autres  $v$ . Remarquons que les deux coïncident dans le cas tempéré, cf. Labesse [Lab90]. Donc l'image de  $E^*$  est un module irréductible, produit tensoriel des modules de Langlands et de Kato (aux places non tempérées).



Vérifions donc que notre représentation induite satisfait les conditions du théorème de Kato. Kato définit pour  $\chi$  un caractère non ramifié

$$c_\alpha(\chi) = \frac{1 - \chi(a_\alpha)q^{-1}}{1 - \chi(a_\alpha)} = \frac{e_\alpha(\chi)}{d_\alpha(\chi)}$$

où  $a_\alpha$  est la coracine associée à  $\alpha$  et  $q$  est le module du corps résiduel. Kato définit aussi le vecteur

$$e(\chi) = \prod_{\alpha > 0} e_\alpha(\chi)$$

Le sous-groupe  $W_\chi$  désigne le stabilisateur de  $\chi$  dans le groupe de Weyl  $W$  et  $W(\chi)$  est le sous-groupe engendré

$$W(\chi) = \langle w_\alpha \mid d_\alpha(\chi) = 0 \text{ et } \alpha > 0 \rangle$$

**Théorème 1.11.1 (Kato).** *Soit  $\chi$  un caractère non ramifié d'un groupe réductif. Alors*

1. *La série principale  $I_\chi$  est irréductible si et seulement si*

(a)  $e(\chi)e(\chi^{-1}) \neq 0$ .

(b)  $W_\chi = W(\chi)$ .

2. *Le vecteur sphérique est cyclique dans  $I_\chi$  si et seulement si*

(a)  $e(\chi) \neq 0$ .

(b)  $W_\chi = W(\chi)$

*Démonstration.* Voir Kato [Kat82], théorème 2.2, page 935. □

Dans notre cas le caractère  $\chi$  a la forme

$$\chi = (p^{3/2}t, p^{3/2}t^{-1}, p^{1/2}t, p^{1/2}t^{-1})$$

où l'on a paramétré  $\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4)$ , pour  $\chi_i(\varpi^{-1}) \in \mathbb{C}^\times$ , et on a toujours  $t > t^{-1}$ . Il est clair que c'est un caractère régulier, c'est-à-dire

$$W_\chi = W(\chi) = 1$$

Par suite il faut seulement vérifier que  $e(\chi) \neq 0$ . On doit vérifier pour toute  $\alpha > 0$

$$1 - p^{-1}\chi(a_\alpha) \neq 0$$

c'est-à-dire  $\chi(a_\alpha) \neq p$ . Nos racines positives ici sont  $\{X_i - X_j, X_i + X_j \mid i < j\}$  et

$$a_\alpha = (0, \dots, \underbrace{p}_{\text{place } i}, \dots, \underbrace{p^{-1}}_{\text{place } j}, \dots, 0) \text{ pour } \alpha = (X_i - X_j) \text{ et } a_\alpha = (0, \dots, \underbrace{p}_{\text{place } i}, \dots, \underbrace{p}_{\text{place } j}, \dots, 0)$$

pour  $\alpha = (X_i + X_j)$ . Notre caractère devient alors

$$\chi(a_\alpha) = (| |^{3/2+\sigma}, | |^{3/2-\sigma}, | |^{1/2+\sigma}, | |^{1/2-\sigma})$$

et donc on obtient :

$$\chi(a_\alpha) = |p|^{i/2 \pm \sigma} |p|^{-j/2 \pm \sigma}$$

et on veut que cela soit égal à  $p$ . Donc on doit avoir  $j/2 - i/2 = -1$  (le cas pour les racines  $X_i + X_j$  est évidemment impossible), ce qui entraîne  $j < i$ , qui est impossible. Par suite

$$\chi(a_\alpha) \neq p$$

Donc les conditions du théorème de Kato sont accomplies.

Pour la place archimédienne on va utiliser les mêmes arguments : si  $\pi_\infty$  est tempérée, alors le résultat du quotient de Langlands nous donne qu'il existe un seul quotient. Si  $\pi_\infty$  est non tempérée on utilise le résultat analogue de Kato pour les places archimédiennes, ce qui complète l'argument et donc l'image de  $I_P^G$  dans  $\mathcal{A}(SO_8)$  est irréductible. Si  $J(\pi, s_0)$  désigne le quotient de  $Ind_P^G(\Pi, s_0)$  nous avons un diagramme

$$\begin{array}{ccc} Ind_P^G(\Pi, s_0) & \xrightarrow{E^*} & \pi \\ & \searrow & \uparrow \\ & & J(\pi, s_0) \end{array}$$

D'où l'image de  $Ind_P^G$  est irréductible dans  $\mathcal{A}(SO_8)$  et donc apparaît avec multiplicité 1.

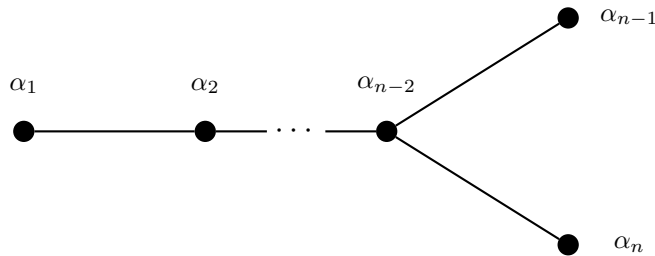
Avec toutes les données et résultats de ce chapitre on a démontré le théorème

**Théorème 1.11.2.** *Pour le groupe orthogonal  $SO_8$  déployé sur  $\mathbb{Q}$  il existe des représentations résiduelles de carré intégrable (et qui appartient donc au spectre discret) formées à partir de séries d'Eisenstein modifiées et que sont données par un paramètre elliptique d'Arthur, associées à la représentation induite  $\pi \otimes |\cdot|^{3/2} \otimes \pi \otimes |\cdot|^{1/2}$ , où la matrice de Hecke associée dans le groupe dual  $\widehat{SO}_8$  a la forme (1.16). De plus la donnée de  $\pi$  définit aussi un unique sous-module irréductible  $E^*(Ind_P^G(\Pi))$  dans l'espace  $\mathcal{A}^2(SO_8)$ .*

---

## Le cas $SO_{2n}$

Notre objet d'étude sera désormais le groupe orthogonal  $SO_{2n}$  avec  $n$  pair associé à la forme quadratique  $Q$  déterminée par la matrice antidiagonale. Donc  $SO_{2n}$  est un groupe déployé sur  $\mathbb{Q}$  de rang  $n$ , de tore maximal  $T$ . Le diagramme de Dynkin associé à  $SO_{2n}$  est donné par

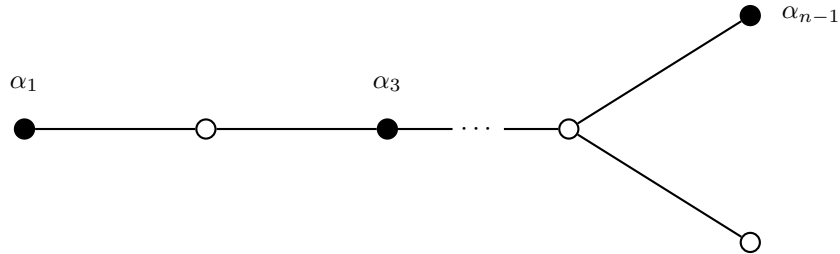


Il est connu ([Bou68]) que le groupe de Weyl associé à ce diagramme est  $\mathfrak{S}_n \times S(\pm 1)^n$ , d'ordre  $n!2^{n-1}$  et les racines simples associées au tore maximal sont :

$$\Delta_0 = \{\alpha_1 = t_1 t_2^{-1}, \alpha_2 = t_2 t_3^{-1}, \dots, \alpha_{n-1} = t_{n-1} t_n^{-1}, \alpha_n = t_{n-1} t_n\}$$

Rappelons que l'on veut induire une représentation  $\Pi$  d'un sous-groupe de Levi  $M$  à tout le groupe  $G = SO_{2n}$ . Le premier pas consiste à choisir le sous-groupe de Levi  $M$ . Comme dans le cas de  $SO_8$ , la représentation  $\Pi$  sera un produit tensoriel de représentations de  $GL_2$  tordues par un caractère non ramifié. C'est

pourquoi on va considérer un produit des groupes de  $GL_2$  comme sous-groupe de Levi minimal. Plus précisément, on va considérer le sous-groupe de Levi  $M$  engendré pour toutes les racines impaires (rappelons que  $n$  est pair), c'est-à-dire :



Par hypothèse  $n$  est pair et donc on fixe désormais la notation  $m = \frac{n}{2}$ . Donc le sous-groupe de Levi  $M$  que l'on considère est isomorphe à  $m$  copies de  $GL_2$  :

$$M \simeq \prod_{i=1}^m GL_2$$

Le tore maximal  $T_M$  du centre de  $M$  est :

$$T_M = \begin{pmatrix} x_1 & & & & & \\ & x_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & x_m & & \\ & & & & x_m & \end{pmatrix}$$

Et l'algèbre de Lie (réelle)

$$\mathfrak{a}_M = \{X_1, X_1, \dots, X_m, X_m\} \simeq \mathbb{R}^m$$

On suivra la même méthode du chapitre 1. Considérons alors les "racines"  $R(T_M, G)$  de  $G$  par rapport au tore  $T_M$ . Ces racines sont obtenues en restreignant les racines  $R(T, G)$  au tore  $T_M$ . On voit aussitôt que l'on obtient :

$$R(T_M, G) = \{\pm X_1, \pm X_2, \dots, \pm X_m, \pm 2X_1, \dots, \pm 2X_m\} \quad (2.1)$$

**Remarque 2.0.3.** Les racines obtenus dans (2.1) forment un vrai système de racines de type  $C_m$  ([Bou68]).

Notons comme dans le chapitre 1  $\Delta_M$  le sous-ensemble de  $R(T_M, G)$ , formé par les restrictions non triviales des racines simples  $\Delta_0$ .

$$\Delta_M = \{X_1 - X_2, X_2 - X_3, \dots, X_{m-1} - X_m, 2X_m\}$$

qui proviennent des racines paires

$$\{\alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_n\} \subset \Delta_0$$

Soit comme avant  $\rho_P$  la demi-somme des racines restreintes au tore  $T_M$ . On vérifie aussitôt

$$2\rho_P = (4(m-1)+2)X_1 + (4(m-2)+2)X_2 + \dots + 2X_m$$

## 2.1 Description du groupe de Weyl et symétries élémentaires

Le groupe de Weyl  $W_M$  de  $M$  relatif à  $T$  est isomorphe à  $m$  copies du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_2$ , car on a  $m$  copies de  $GL_2$ . Par ailleurs,  $(\mathfrak{S}_2)^m$  se plonge de

manière canonique dans  $\mathfrak{S}_m \times \overbrace{(1, \dots, 1)}^m \subset W_G$ . On vérifie que  $W_M = W^{a_M}$ . Donc le quotient  $W_G/W_M$  agit fidèlement sur  $\mathfrak{a}_M$ .

Pour les calculs des termes constants des séries d'Eisenstein, et *a fortiori* des opérateurs d'entrelacement il est nécessaire de connaître les éléments  $W(M) \subset W_G$ . Or  $W(M)$  sont des éléments de  $W_G$  de longueur minimale dans leur classe modulo  $W_M$  et qui satisfont la condition  $wMw^{-1}$  est toujours un sous-groupe de Levi standard de  $G$ . Comme dans le cas de  $SO_8$ , on a une condition spéciale de rigidité : le fait  $wMw^{-1}$  est un Levi standard entraîne que  $wMw^{-1} = M$ .

**Lemme 2.1.1.** *Avec notre groupe  $G$  et le sous-groupe de Levi  $M$  donnés, si  $w \in W_G$  est de longueur minimale dans sa classe modulo  $W_M$  et  $wMw^{-1}$  est un sous-groupe de Levi standard, alors  $M = wMw^{-1}$ .*

*Démonstration.* D'après notre diagramme les possibilités pour  $wMw^{-1}$  sont les éléments  $\langle \alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-3}, \alpha_{n-1} \rangle$  ou bien  $\langle \alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-3}, \alpha_n \rangle$ . On vérifie aussitôt que  $M$  ne peut pas être conjugué à  $\langle \alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-3}, \alpha_n \rangle$ .  $\square$

Or pour les calculs on a besoin de l'image de  $W(M)$  dans  $W_G/W_M$ . La conséquence de  $wMw^{-1} = M$  est que  $R(G, T_M)$  est un vrai système de racines, dont le groupe de Weyl est  $W_G/W_M$ . Compte tenu de ces remarques on obtient dans le cas du groupe  $SO_{2n}$  que  $R(G, T_M)$  est un système de racines de type  $C_m$  ( $n/2 = m$ ). Les éléments de  $W(M)$  sont engendrés par les symétries élémentaires. Dans notre cas les symétries élémentaires ont la forme :

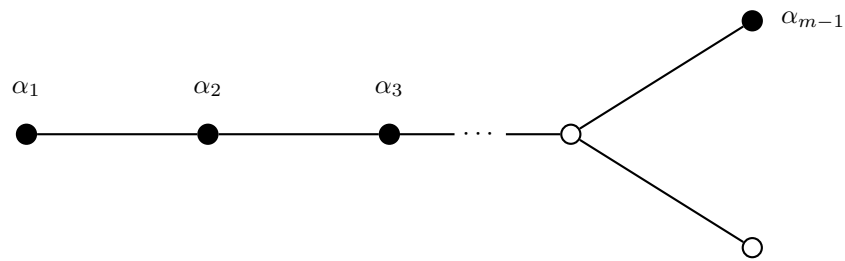
$$m \left\{ \begin{array}{l} w_1 = (1, 2) \underbrace{(1, \dots, 1)}_m \\ w_2 = (2, 3)(1, \dots, 1) \\ \vdots \\ w_{m-1} = (m, m-1)(1, \dots, 1) \\ w_m = 1(1, \dots, 1, -1) \end{array} \right.$$

## 2.2 Sous-groupes de Levi de corang 1

Comme dans le cas de  $SO_8$  soit  $\alpha' \in \Delta_M$  une racine et soit  $\alpha \in \Delta_0$  la racine qui se projette sur  $\alpha'$  sous l'application de restriction au tore  $T_M$ . On notera  $M_\alpha$  le sous-groupe de Levi standard de  $G$  tel que  $\Delta_0^{M_\alpha} = \{\alpha\} \cap \Delta_0^M$ , où  $\Delta_0^M = \Delta_0 \cup R(T, M)$ . Par suite, on aura  $m$  sous-groupes de Levi standard  $M_\alpha$  un pour chaque racine  $\alpha' \in \Delta_M$ .

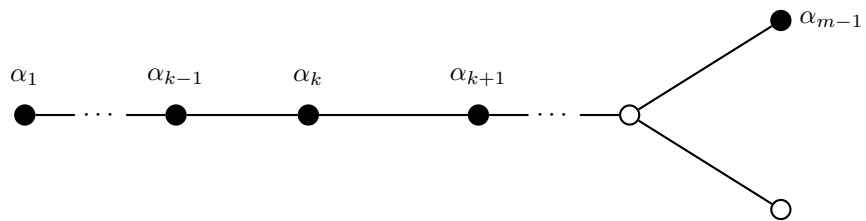
D'après notre méthode, on va considérer des sous-groupes de Levi de corang relatif 1. Par conséquent,  $SO_{2n}$  a exactement  $m$  sous-groupes de Levi de corang relatif 1 : on considère toutes les racines impaires engendrant  $M$  et on ajoute une racine paire  $\alpha_j$ . Le sous-groupe de Levi résultant  $M_j$ , nous sera vital pour la construction des termes constants des séries d'Eisenstein.

Commençons par la racine  $\alpha'_1 = X_1 - X_2$  qui provient de la racine  $\alpha_2 = T_2 - T_3$ . Par suite, le sous-groupe de Levi est engendré pour toutes les racines impaires plus la racine  $\alpha_2$ . Le diagramme pour ce groupe est donné par

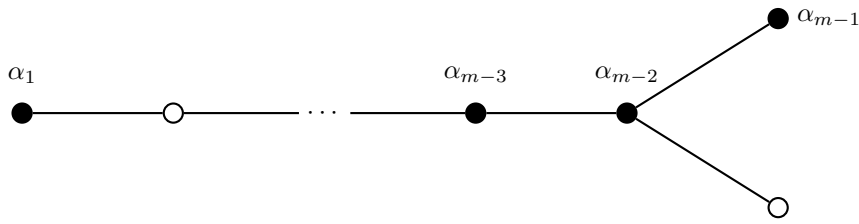


Ce groupe  $M_{\alpha_2}$  est isomorphe à  $GL_4 \times (GL_2)^{m-2}$ .

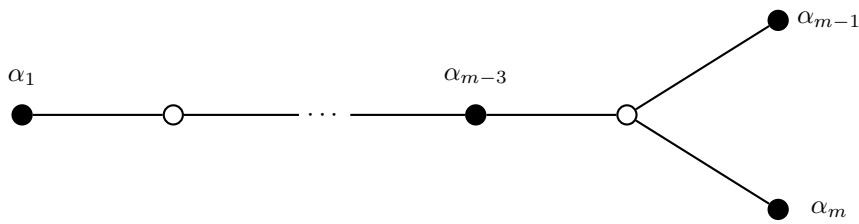
Plus généralement, on peut considérer les sous-groupes de Levi standard  $M_{\alpha_k}$  avec  $k < m$ . Tous ces groupes sont construits à partir de  $M$  en ajoutant la racine  $\alpha_k$  ( $k$  est impair) et donc leur diagramme de Dynkin est :



Remarquons un cas particulier de ces sous-groupes, celui où le diagramme de Dynkin est du type :



Tous ces sous-groupes de Levi sont isomorphes à  $GL_4 \times (GL_2)^{m-2}$ . Dans la section suivante on verra que les opérateurs d'entrelacement associés à ces sous-groupes de Levi sont un quotient de fonctions  $L$  du même type. En revanche, le sous-groupe de Levi qui résulte lorsque on considère la racine  $\alpha_m$ , est un sous-groupe isomorphe à  $(GL_2)^{m-1} \times SO_4$  et son diagramme est :



### 2.3 Séries d'Eisenstein

Comme dans le premier chapitre on construit une représentation du sous-groupe de Levi  $M$ , on considère pour chaque facteur  $GL_2$  une représentation cuspidale automorphe  $\pi_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) que l'on va tordre par le caractère non ramifié  $|det(g)|^{s_i}$ ,  $s_i \in \mathbb{C}$  où on va abréger la notation  $\pi_i \otimes s_i := \pi_i \otimes |det(g)|^{s_i}$ . Donc la représentation du sous-groupe  $M$  sera

$$\Pi := \pi_1 \otimes s_1 \otimes \cdots \otimes \pi_m \otimes s_m \tag{2.2}$$

et on va considérer l'induite unitaire (normalisée)

$$Ind_P^G(\Pi \otimes 1)$$

pour construire la série d'Eisenstein à plusieurs variables (1.4) et étudier ses termes constants. Comme on l'a déjà vu, dans le théorème 1.6.1 cette série d'Eisenstein converge dès que  $Re \pi$  est assez grande.

Pour les calculs des termes constants leur pôles, on étudiera les opérateurs d'entrelacement associés.

## 2.4 Opérateurs d'entrelacement associés aux symétries élémentaires

Pour les sous-groupes de Levi  $M_j$  de corang 1 on est dans une situation des Langlands et on peut calculer directement ces opérateurs d'entrelacement. Pour la symétrie  $w_1$ , le sous-groupe de Levi associé est  $M_{\alpha_2} \simeq GL_4 \times (GL_2)^{m-2}$ . De la même manière on a aussi

$$\widehat{GL}_2 \times \widehat{GL}_2 \times (\widehat{GL}_2)^{m-2} \subset \widehat{GL}_4 \times (\widehat{GL}_2)^{m-2}$$

et l'opérateur d'entrelacement "se passe" dans le facteur à gauche  $\widehat{GL}_2 \times \widehat{GL}_2 \subset \widehat{GL}_4$ , c'est-à-dire, il sera constant dans les variables  $s_3, \dots, s_m$ . Par conséquent, l'opérateur partiel associé est

$$M^S(w_1, \Pi) = \frac{L^S(s_1 - s_2, \pi_1 \otimes \pi_2^\vee)}{L^S(1 + s_1 - s_2, \pi_1 \otimes \pi_2^\vee)} \quad (2.3)$$

On obtient un résultat analogue lorsque l'on considère les opérateurs associés aux racines  $\alpha_j$  avec  $j < n$  et à une symétrie élémentaire  $w_k$ ,  $k < m$ . Explicitement, si  $\alpha_j \in \Delta_M$ ,  $j < n$ , on aura

$$(\widehat{GL}_2)^b \times \widehat{GL}_2 \times \widehat{GL}_2 \times (\widehat{GL}_2)^c \subset (\widehat{GL}_2)^b \times \widehat{GL}_4 \times (\widehat{GL}_2)^c$$

où  $0 \leq b, c \leq m - 2$  et tel que  $b + c = m - 2$ . Alors, l'opérateur d'entrelacement partiel associé à la symétrie  $w_k$  "se passe" uniquement dans le facteur  $\widehat{GL}_2 \times \widehat{GL}_2 \subset \widehat{GL}_4$ . La conséquence est que dans le quotient partiel de fonctions  $L$  interviennent uniquement les variables holomorphes  $s_k$  et  $s_{k+1}$

$$M^S(w_k, \Pi) = \frac{L^S(s_k - s_{k+1}, \pi_k \otimes \pi_{k+1}^\vee)}{L^S(1 + s_k - s_{k+1}, \pi_k \otimes \pi_{k+1}^\vee)} \quad (2.4)$$

Considérons finalement le cas  $j = n$  et donc associé à  $w_m$ . Le sous-groupe de Levi de corang 1 est  $M_{\alpha_n} = (GL_2)^{m-2} \times SO_4$ . De manière que l'on a

$$(\widehat{GL}_2)^{m-1} \times \widehat{GL}_2 \subset (\widehat{GL}_2)^{m-1} \times \widehat{SO}_4$$

Comme avant l'opérateur "se passe" dans le facteur à droite  $\widehat{GL}_2 \subset \widehat{SO}_4$ . L'action de  $GL_2$  sur le radical unipotent de  $\widehat{SO}_4$  est donnée par le déterminant. Par suite, l'opérateur partiel associé à  $w_m$  est donné par

$$M^S(w_m, \Pi) = \frac{L^S(\chi_{\pi_k}, 2s_m)}{L^S(\chi_{\pi_k}, 1 + 2s_m)} \quad (2.5)$$

Ces facteurs nous seront utiles pour étudier les pôles des termes constants.



## 2.5 Pôles des termes constants

Comme avant, pour les calculs des pôles au point  $s_0$ , on fera les hypothèses :

1.  $\pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_m$ .
2.  $\chi_{\pi_1} = \chi_{\pi_2} = \dots = \chi_{\pi_m} = 1$ .

qui entraînent que la représentation  $\pi$  est autoduale. Les quotients de fonctions  $L$  associés à  $w_m$  auront la forme particulière :

$$\frac{L^S(\chi_{\pi_i, 2s_i})}{L^S(\chi_{\pi_i, 1+2s_i})} = \frac{\zeta^S(2s_i)}{\zeta^S(1+2s_i)}$$

Pour les autres quotients on a

$$\frac{L^S(s_i - s_{i+1}, \pi_i \otimes \pi_{i+1}^\vee)}{L^S(1 + s_i - s_{i+1}, \pi_i \otimes \pi_{i+1}^\vee)} = \frac{L^S(s_i - s_{i-1}, \pi \otimes \pi)}{L^S(1 + s_i - s_{i-1}, \pi \otimes \pi)}$$

Un problème important pour les cas général  $SO_{2n}$  est de calculer les pôles des termes constants. Comme dans le cas  $SO_8$  on va étudier le point  $s_0 = (\frac{m-1}{2}, \dots, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$  qui se trouve dans la chambre de Weyl positive. De nouveau on a choisit ce point car la matrice de Hecke de la représentation triviale est notre point de référence. On va commencer pour étudier l'opérateur d'entrelacement associé à l'élément de plus grande longueur, qui sera, comme on le verra, le seul terme avec  $m$  pôles et les autres termes constants auront moins de  $m$  pôles au point  $s_0$ .

Nous avons une description de l'élément  $w_0$ .

**Lemme 2.5.1.** Soient  $w_1, \dots, w_m$  les symétries élémentaires du groupe de Weyl, d'un système de racines de type  $C_m$  et  $w_0$  l'élément de plus grande longueur. Soit  $a = w_m \cdots w_1$ . Alors

$$w_0 = \overbrace{a \cdots a}^{m \text{ fois}}$$

De même si  $b = w_1 \cdots w_m$ , alors  $b^m = w_0$ .

*Démonstration.* On va décrire explicitement l'action des symétries élémentaires sur des variables  $X_1, \dots, X_m$ . Ainsi

$$[X_1, X_2, \dots, X_m] \xrightarrow{w_1} [X_2, X_1, \dots, X_m],$$

permuté les 2 premières variables. En général  $w_i$  pour  $i < m$  permute la  $i$ -ème et la  $i + 1$ -ème variable. La symétrie  $w_m$  introduit un signe moins dans la dernière place.

$$[X_1, X_2, \dots, X_m] \xrightarrow{w_m} [X_1, X_2, \dots, -X_m]$$

etc. Sur ces variables on vérifie aussitôt que

$$\begin{array}{c} [X_1, X_2, \dots, X_{m-1}, X_m] \\ \downarrow a \\ [X_2, X_3, \dots, X_m, -X_1] \\ \downarrow a \\ [X_3, X_4, \dots, -X_1, -X_2] \end{array}$$

Donc il est immédiat que

$$[X_1, X_2, \dots, X_m] \xrightarrow{a^m} [-X_1, -X_2, \dots, -X_m],$$

□

Avec cet écriture on peut décrire les pôles de  $M_{w_0}$ . La décomposition de l'opérateur d'entrelacement ([M-W95], remarque page 91) entraîne

$$M(w_0, \pi) = M(w_1, w'\pi)M(w'\pi)$$

Or l'action de  $w'$  sur les variables holomorphes  $s_1, \dots, s_m$  est donnée par

$$[s_1, s_2, \dots, s_m] \rightarrow [-s_2, -s_1, \dots, -s_m]$$

D'après la construction de l'opérateur d'entrelacement on obtient

$$M^S(w_1, w'\pi) = \frac{L^S(\pi_1 \otimes \pi_2^\vee, s_1 - s_2)}{L^S(\pi_1 \otimes \pi_2^\vee, s_1 - s_2 + 1)}$$

Ce terme donne un pôle au point  $s_0 = (\frac{n-1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$  qui appartient à l'hyperplan  $s_1 - s_2 = 1$ . Or  $w' = w_2 \cdots w_m b^{m-1}$ . Similairement, on traite les facteurs restants

$$M^S(w_1, w_2 \cdots w_m b^k \pi), \quad 1 \leq k \leq m-1$$

possèdent un pôle au point  $s_0$ . Par récurrence on montre que l'opérateur partiel  $M_{w_0}^S$  a exactement  $m$  pôles au point  $s_0$ , si on prend en compte le dernier terme, qui est un quotient des fonctions  $\zeta$  ayant un pôle le long de l'hyperplan  $s_m = 1/2$ .

**Remarque 2.5.2.** Bien sûr l'opérateur d'entrelacement est intrinsèque et ne dépend pas de l'écriture de l'élément  $w$ . Pour les autres termes constants donnés par  $M_w, w \in W$  on donnera un argument qui ne dépend guère de la factorisation de  $w$ .

## 2.6 Action de l'opérateur d'entrelacement et quotients de Langlands

Oubliant un instant ce qui précède, soit maintenant  $G$  un groupe algébrique connexe déployé sur  $\mathbb{Q}$ , et soit  $M$  un sous-groupe de Levi standard contenu dans un sous-groupe parabolique standard  $P$ , tel que l'on ait la condition suivante d'association : si  $w \in W_G$ , le groupe de Weyl de  $G$  (par rapport au tore maximal déployé  $T$  sur  $\mathbb{Q}$ ), est tel que  $wMw^{-1}$  est encore un sous-groupe de Levi standard de  $G$ , alors  $M = wMw^{-1}$ , autrement dit,  $M$  est unique dans sa classe d'association. Notons  $W(M)$  l'ensemble des éléments de  $w \in W_G$  de longueur minimale dans leur classe  $wW_M$  (groupe de Weyl de  $M$  relatif à  $T$ ) et tels que  $wMw^{-1}$  soit encore un sous-groupe de Levi standard. La condition  $M = wMw^{-1}$  entraîne que l'image de l'ensemble  $W(M)$  dans  $W_G/W_M$  est un groupe, un vrai groupe de Weyl.

On suit la méthode du chapitre 1 pour construire un sous-groupe de Levi  $M_\alpha$  ou  $M$  est maximal dans  $M_\alpha$ , de corang 1. On peut construire des formes automorphes de  $G$  à partir de représentations  $\pi$  automorphes de  $M$  à l'aide des séries d'Eisenstein. Soit donc  $\pi$  une représentation cuspidale automorphe de  $M$  et  $\phi_\pi$  une fonction dans l'espace de la représentation induite. On forme, comme l'on a déjà vu, la série d'Eisenstein

$$E(\pi, s)(g) = \sum_{\gamma \in P(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{Q})} \phi_\pi(\gamma g, s)$$

où  $s \in \mathfrak{a}_M^+ \otimes \mathbb{C}$ . On va calculer les termes constants de cette série d'Eisenstein comme certains quotients de fonctions  $L$  de Langlands que l'on appellera quotients de Langlands.

On va rappeler le formalisme de la fonction  $L$  de Langlands. Si  $M$  est un groupe réductif déployé sur  $\mathbb{Q}$ , tel que  $M \subset G$ , comme sous-groupe de Levi, qui est notre cas, et soit  $(r, V)$  une représentation analytique complexe du groupe de Langlands  $\widehat{M}$ . Soit  $\pi$  une représentation automorphe de  $M(\mathbb{A})$ , alors la fonction partielle  $L$  de Langlands est

$$L(\pi, r) = \prod_{v \notin S} \det(1 - r(t(\pi_v)))^{-1} \quad (2.6)$$

où  $t(\pi_v)$  est la classe de conjugaison associée à la représentation  $\pi_v$  non ramifiée dans  $\widehat{M}$  via l'isomorphisme de Satake [Sha2]. Cette fonction est construite à partir de la fonction  $L$  locale de Langlands attachée à  $\pi_v$  et donnée de manière générale par

$$L_v(\pi, r, s) = \det(1 - r(\pi_v)q_v^{-s})^{-1}$$

**Remarque 2.6.1.** On sait que le produit (2.6) converge absolument si  $Re \pi \gg 0$ , voir par exemple [L1].  $Re \pi$  est le caractère associé à  $\pi$  que l'on a défini dans le chapitre 1.

**Remarque 2.6.2.** La fonction (2.6) est évaluée en 0, l'évaluation en 1 donne

$$L(\pi, r)[1] = \prod_{v \notin S} \det(1 - r(t(\pi_v))q_v^{-1})^{-1}$$

Alors si  $M \subset P = MN \subset G$  de rang relatif 1, on sait que la représentation  $r$  on peut la regarder comme l'action adjointe sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{u}$  de  $\widehat{N}$ . Alors dans ce cas-là l'opérateur d'entrelacement associé est :

$$M(\pi) = \frac{L(\pi, r)}{L(\pi, r)[1]} \quad (2.7)$$

**Remarque 2.6.3.** Ce calcul de l'opérateur d'entrelacement comme quotients de fonctions  $L$  fut fait par Langlands pour un groupe  $G$  semisimple et de type adjoint. Néanmoins Lai [Lai] étendit le résultat à n'importe quel groupe quasi-déployé. Vérifions que la formule (2.7) est conforme à l'expression usuelle

Dans le cadre du groupe de Langlands on a  $\widehat{M} \subset \widehat{G}$ , et le tore  $T_{\widehat{M}} \subset \widehat{M}$ . Soit  $\alpha : T_M \rightarrow \mathbb{G}_m$  la restriction à  $T_M$  de l'unique racine simple de  $G$  non triviale sur  $T_M$ . Alors on a la coracine  $\widehat{\alpha} : T_{\widehat{M}} \rightarrow \mathbb{C}$ . L'action de la représentation adjoint  $r$  de  $\widehat{M}$ , se décompose sous l'action de  $T_{\widehat{M}}$ . Par suite,  $\mathfrak{u}$  admet un décomposition  $\mathfrak{u} = \bigoplus_i \mathfrak{u}_i$ , où les algèbres  $\mathfrak{u}_i$  sont données par

$$\mathfrak{u}_i = \{X \in \mathfrak{u} \mid tX = \widehat{\alpha}(t)^i X, \quad t \in T_{\widehat{M}}\}$$

Avec ces données l'opérateur d'entrelacement pour  $\pi$  a la forme

$$M^S(\pi) = \prod_i \frac{L^S(\pi, r_i)}{L^S(\pi, r_i)[1]}$$

Sous la torsion  $\pi \rightarrow \pi \otimes s$ ,  $s \in \text{Hom}(M(\mathbb{A}), \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$ , on aura l'opérateur

$$M^S(\pi \otimes s) = \prod_i \frac{L^S(\pi \otimes s, r_i)}{L^S(\pi \otimes s, r_i)[1]}$$

Mais on sait que  $T_{\widehat{G}} \subset T_{\widehat{M}}$  opère trivialement sur  $\mathfrak{u}$  et pour chaque représentation  $r_i$  on a

$$L^S(\pi \otimes s, r_i) = L^S(\pi, \otimes |^{i\langle s, \widehat{\alpha}_i \rangle}, r_i) = L^S(\pi, r_i)[i \langle s, \widehat{\alpha}_i \rangle]$$

De manière que l'on retrouve la formule classique

$$M^S(\pi \otimes s) = \prod_i \frac{L^S(\pi, r_i)[i \langle s, \widehat{\alpha} \rangle]}{L^S(\pi, r_i)[i \langle s, \widehat{\alpha} \rangle + 1]}$$

**Définition 2.6.4.** Supposons  $G$  groupe réductif déployé, soit  $M$  un sous-groupe de Levi, supposons que nous sommes dans une situation de Langlands, c'est-à-dire soit  $M_\alpha$  un sous-groupe de Levi où  $M$  ait rang 1, et soit  $\alpha : T_M \rightarrow \mathbb{G}_m$

## 2. Le cas $SO_{2n}$ 2.6. Action de l'opérateur d'entrelacement et quotients de Langlands

la restriction à  $T_M$  de l'unique racine simple de  $G$  non triviale sur  $T_M$ . Soit  $\pi$  une représentation cuspidale de  $M$ , soit  $r_\alpha$  la représentation du groupe dual  $\widehat{M}$  associé à  $\pi$ . On pose  $Q^S(\pi, \alpha)$  le quotient partiel de Langlands (non ramifié et donc bien défini sans la conjecture de Langlands locale) associé à  $(\pi, M_\alpha)$  et donné par :

$$Q^S(\pi, \alpha) := \frac{L^S(\pi, r_\alpha)}{L^S(\pi, r_\alpha)[1]} \quad (2.8)$$

On suppose que la partie réelle de  $\pi$  est assez grande pour qu'il soit convergent. Dans notre cas, on considère la représentation tordue  $\pi \otimes s$ . On aura alors un quotient de  $Q(\pi \otimes s, \alpha)$ .

**Exemple 2.6.5.** Dans le cas de  $SO_{2n}$ , on a vérifié que l'on est dans une situation de Langlands, avec nos données  $M, M_\alpha, \pi$  représentation cuspidale de  $M$ , etc. Dans le cas particulier où  $\alpha$  est la racine  $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j, i < j$  alors  $Q(\pi, s^\alpha)$  est donné par

$$\frac{L^S(\pi \otimes \pi^\vee, s_i - s_j)}{L^S(\pi \otimes \pi^\vee, s_i - s_j + 1)}$$

Maintenant on va démontrer une formule qui exprime les opérateurs d'entrelacement en termes de fonctions  $L$ .

**Proposition 2.6.6.** Soit  $w \in W(M)$  un élément du groupe de Weyl, sous les conditions dites ci-dessus. Alors l'opérateur d'entrelacement (partiel, en dehors des places ramifiées et archimédiennes) associé à lui est

$$M^S(w, \pi) = \prod_{\substack{\alpha > 0 \\ w\alpha < 0}} Q^S(\pi, \alpha)$$

où les racines  $\alpha \in R_{ind}(T_M, G)$ .

*Démonstration.* Rappelons que si  $w = w_{\alpha_n} \cdots w_{\alpha_1}$ , avec écriture minimale, on pose  $w_i = w_{\alpha_i} \cdots w_{\alpha_1}$ , alors on a

$$M(w, \pi) = M(w_{\alpha_n}, w_{\alpha_{n-1}} \pi) \cdots M(w_{\alpha_1}, \pi)$$

Voir par exemple [M-W], §II.1.7, page 93.

On fera la démonstration par récurrence sur la longueur de  $w$ . On néglige l'indice supérieur  $S$  dans les notations.

Pour abrégé la notation on pose  $Q_\alpha(\pi) = Q(\pi, \alpha)$ . Si la longueur de  $w, l(w) = 1$ , alors  $w$  est une symétrie élémentaire, et par conséquent

$$M(w_\alpha, \pi) = Q_\alpha(\pi) = Q(\pi, \alpha)$$

car nous sommes dans une situation  $M \subsetneq M_\alpha \subset G$  de rang relatif 1, et par la construction de l'opérateur d'entrelacement, il se passe dans  $M_\alpha$ . Par ailleurs on sait que

$$\alpha = \{\beta \in R_{ind}(T_M, G) > 0 \mid w_\alpha \beta < 0\}$$

car  $w_\alpha$  est une symétrie élémentaire ([M-W], §I.1.8, lemme, page 14).

Si  $l(w) = 2$ , on a une décomposition  $w = w_\alpha w_\beta$

$$M(w_\alpha w_\beta, \pi) = Q_\alpha(w_\beta \pi) Q_\beta(\pi)$$

où le dernier facteur  $Q_\beta(\pi)$  est un quotient de Langlands comme on l'a décrit ci-dessus. On remarque aussi que  $w_\alpha w_\beta \beta = w_\alpha(-\beta) < 0$ , par les propriétés élémentaires des systèmes de racines. D'ailleurs on a

$$Q_\alpha(w_\beta \pi) = Q_{w_\beta^{-1}\alpha}(\pi)$$

qui provient de l'égalité  $\alpha(w) = w^{-1}(\alpha)$ . Ceci entraîne  $w_\alpha w_\beta (w_\beta^{-1})(\alpha) = w_\alpha \alpha < 0$ . On pose

$$\Sigma_w^- = \{\gamma \in R_{ind}(T_M, G) > 0 \mid w\gamma < 0\}$$

et aussi

$$\Sigma_w = \{\gamma \in R_{ind}(T_M, G) > 0 \mid w^{-1}\gamma < 0\}$$

Alors on a

$$\{\alpha, \beta\} \subset \{\gamma \in R_{ind}(T_M, G) > 0 \mid w\gamma < 0\} = \Sigma_w^-$$

et puisque  $l(w) = 2$  on a l'égalité parmi ces deux ensembles (voir Casselman [Cas] page 6).

Pour le cas général  $l(w) = n$ , nous avons une décomposition  $w = w_{\alpha_n} w'$ , où  $l(w') = n - 1$ . La décomposition de l'opérateur d'entrelacement nous donne

$$M(w, \pi) = M(w_{\alpha_n}, w' \pi) M(w', \pi)$$

et par la hypothèse d'induction

$$\begin{aligned} M^S(w, \pi) &= Q_{\alpha_n}^S(w' \pi) \prod_{\substack{\beta > 0 \\ w' \beta < 0}} Q_\beta^S(\pi) \\ &= Q_{(w')^{-1}\alpha_n}^S(\pi) \prod_{\substack{\beta > 0 \\ w' \beta < 0}} Q_\beta^S(\pi) \end{aligned}$$

où les facteurs  $Q_\beta(\pi)$  sont déjà sous la forme voulue. Il faut vérifier que  $\Sigma_{w'}^- \subset \Sigma_w^-$ . D'un côté, si on pose  $\gamma = (w')^{-1}\alpha_n$ , alors on a  $w\gamma = w_{\alpha_n} w' (w')^{-1}\alpha_n < 0$ . Donc la racine  $\gamma = (w')^{-1}\alpha_n \in \Sigma_w^-$  et de plus nous avons  $\gamma > 0$  par le lemme I.1.8 de [M-W], page 14, c'est-à-dire  $\gamma \notin \Sigma_{w'}^-$ .

Maintenant on veut démontrer que

$$\Sigma_w^- = \Sigma_{w'}^- \cup \gamma$$

Mais d'après le lemme 1.1.1 de Casselman [Cas], pour tous  $w_1, w_2 \in W$ , les conditions suivantes son équivalentes :

1.  $l(w_1 w_2) = l(w_1) + l(w_2)$  ;
2.  $\Sigma_{w_1 w_2} = w_1 \Sigma_{w_2} \cup \Sigma_{w_1}$ .

Ce qui pour notre cas nous donne :

$$\begin{aligned}\Sigma_w^- &= \Sigma_{w^{-1}} = \Sigma_{(w')^{-1}w_{\alpha_n}^{-1}} = (w')^{-1}\Sigma_{w_{\alpha_n}^{-1}} \cup \Sigma_{(w')^{-1}} \\ &= (w')^{-1}\Sigma_{w_{\alpha_n}^-} \cup \Sigma_{w'}^-\end{aligned}$$

Par hypothèse nous avons  $l(w^{-1}) = n = l(w_{\alpha_n}^{-1}) + l((w')^{-1})$  (car  $l(w_{\alpha_n}) + l(w') = l(w_{\alpha_n}w') = l(w) = n$ ) et donc la formule est démontrée.  $\square$

**Corollaire 2.6.7.** Dans le cas du groupe orthogonal  $SO_{2n}$  (où on pose  $2n=m$ ), avec nos données,  $M, M_\alpha, \pi$ , soit  $\underline{s} = (s_1, \dots, s_n)$ . La formule qui correspond à l'opérateur d'entrelacement partiel, est donnée par

$$\begin{aligned}M^S(w, \underline{s}) &= \prod_{\substack{i < j \\ w(\epsilon_i - \epsilon_j) < 0}} \frac{L^S(\pi \otimes \pi^\vee, s_i - s_j)}{L^S(\pi \otimes \pi^\vee, s_i - s_j + 1)} \times \prod_{\substack{i < j \\ w(\epsilon_i + \epsilon_j) < 0}} \frac{L^S(\pi \otimes \pi, s_i + s_j)}{L^S(\pi \otimes \pi, s_i + s_j + 1)} \times \\ &\quad \times \prod_{w(2\epsilon_i) < 0} \frac{\zeta^S(2s_i)}{\zeta^S(1 + 2s_i)}\end{aligned}$$

*Démonstration.* Le groupe  $SO(m)$  satisfait tous les conditions d'association dites ci-dessus et nous donne un vraie système de racines du type  $C_m$ . Alors on applique la formule (2.6.6) au système  $C_m$  et le résultat est immédiat.  $\square$

**Lemme 2.6.8.** Soit  $P'$  un autre sous-groupe parabolique de  $G$ , avec décomposition  $P' = M'U'$ . Alors les termes constants qui correspondent à  $P'$  sont :

1. Les mêmes que pour le sous-groupe parabolique  $P$  si  $M' = M$
2. Nuls si  $M' \neq M$ .

*Démonstration.* Par la proposition 1.8.2 et la même condition de rigidité que pour  $SO_8$  ( si  $w \in W(M)$  et  $wMw^{-1}$  un sous-groupe de Levi standard entraîne  $wMw^{-1} = M$ )  $\square$

Grâce à la proposition 2.6.6 nous avons le résultat suivant.

**Proposition 2.6.9.** Considérons le point  $s_0 = (\frac{n-1}{2}, \dots, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$  (rappelons  $\frac{n}{2} = m$ ). Considérons la série de Eisenstein  $E(\phi_\pi, \underline{s})$  et la série modifiée  $E^*(\phi_\pi, \underline{s}) = (s_1 - s_1^0)(s_2 - s_2^0) \cdots (s_m - s_m^0)E(\phi_\pi, \underline{s})$ , qui a priori est méromorphe car  $E(\phi_\pi, s)$  est méromorphe. Alors  $E^*(\phi_\pi, \underline{s})$  est holomorphe en  $s_0$  (et non nulle), le seul terme constant non nul de  $E^*(\phi_\pi, \underline{s})$  est celui qui correspond au terme  $M^S(w_0, \pi, \underline{s})$ , de l'élément  $w_0 = 1(-1, \dots, -1)$ . La valeur de  $E^*$  au point  $s_0$  est non nul.

*Démonstration.* Remarquons d'abord que par le lemme 2.6.8 il suffit de tenir compte seulement des termes constants donnés par le sous-groupe parabolique  $P$ . On sait que les termes constants d'une série d'Eisenstein sont donnés par les opérateurs d'entrelacement et de plus que les pôles de la série d'Eisenstein sont les pôles de ces termes constants ([M-W], §II.1.7, prop., page 93). En fait, on a

1. Pour  $i < j$ , dans le point  $s_0$  on a  $s_i - s_j \geq 1$  avec égalité si et seulement si  $j = i + 1$ .
2. Les termes  $s_i + s_j \geq \frac{3}{2}$ , et
3. Pour tout  $i$  on a  $2s_i \geq 1$  avec égalité si et seulement si  $i = m$ .
4. Tous les termes (pour  $i < j$ )  $s_i - s_j + 1, s_i + s_j + 1, 2s_i + 1$  sont tous  $\geq 2$ .

Alors tous les termes résiduels sont donnés par  $s_i - s_j = 1$  et  $2s_m = 1$  qui peuvent apparaître seulement dans le numérateur et qui nous donnent de résidus simples en  $\frac{1}{s_i - s_j - 1}$  et  $\frac{1}{s_m - 1/2}$  respectivement. Donc il n'y a pas de pôles dans les dénominateurs.

Par conséquent, les termes qui donnent de pôle au point  $s_0$  sont

$$\frac{L^S(\pi \otimes \pi^\vee, s_1 - s_2)}{L^S(\pi \otimes \pi^\vee, 1 + s_1 - s_2)}, \dots, \frac{L^S(\pi \otimes \pi^\vee, s_{m-1} - s_m)}{L^S(\pi \otimes \pi^\vee, s_{m-1} - s_m + 1)}$$

et le terme

$$\frac{\zeta^S(2s_m)}{\zeta^S(1 + 2s_m)}$$

qui apparaissent tous dans  $M^S(w_0, \pi)$ . Alors  $M^S(w_0, \pi)$  a exactement  $m$  pôles au point  $s_0$ .

En général au point  $s_0$ , le quotient  $\frac{L^S(\pi^2, s_i - s_j)}{L^S(\pi^2, s_i - s_j + 1)}$  avec  $i < j$  nous donne  $s_i - s_j \geq 1$  ce qui entraîne qu'il n'y a pas de pôles dans le dénominateur et si on a un pôle en  $s_0$ , alors cela veut dire qu'intervient la racine  $\epsilon_i - \epsilon_{i+1}$  et alors on aura un résidu en  $\frac{1}{s_i + s_{i+1} - 1}$  avec multiplicité 1.

Par le quotient  $\frac{L^S(\pi^2, s_i + s_j)}{L^S(\pi^2, s_i + s_j + 1)}$ , nous aurons  $s_i + s_j \geq 2$  et  $s_i + s_j + 1 \geq 3$ , par conséquent ces termes n'ont pas de pôle au point  $s_0$ .

Pour le terme  $\frac{2s_i}{1 + 2s_i}$ , on n'aura de pôle que si  $i = m$ , avec un résidu  $\frac{1}{2s_m - 1}$ .

Les conclusions que l'on obtient sont :

1. La série modifiée  $E^*$  est holomorphe au point  $s_0$ .
2. S'il existe un terme constant non nul associé à un élément  $w$ , on doit avoir  $w(\alpha) < 0$  pour toutes les racines  $\alpha \in A$ , où  $A$  est

$$A = \{\epsilon_i - \epsilon_{i+1}, 2\epsilon_m \mid i = 1, \dots, m - 1\}$$

Si  $w$  est un élément tel que  $w\alpha < 0$  pour toutes les racines simples, alors  $w$  envoie la chambre de Weyl positive  $R^+$  dans  $R^-$  et alors on a  $w(R^+) = R^-$  pour toutes les chambres de Weyl que correspond à les racines simples, alors  $w = w_0$  par les propriétés élémentaires des racines. Ce qui démontre la proposition.  $\square$

## 2.7 Exposant cuspidaux et spectre discret

Le caractère central de  $\Pi$  est  $|\det(g)|^{2s_1} \dots |\det(g)|^{2s_m}$ . Donc l'élément associé  $Re \Pi = 2s_1 X_1 + 2s_2 X_2 + \dots + 2s_m X_m$ . Rappelons que  $w_0$  agit sur le point  $s_0$



en changeant tous les signes. On veut déterminer que la représentation  $\Pi$  est de carré intégrable. Pour vérifier le critère de la proposition 1.9.1 on doit résoudre le système

$$\left(-\frac{n-1}{2}, -\frac{n-3}{2}, \dots, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = a_1(1, -1, 0, \dots, 0) + a_2(0, 1, -1, \dots, 0) + \dots + a_{m-1}(0, 0, \dots, 1, -1) + a_m(0, \dots, 0, 2)$$

et montrer que tous les coefficients  $a_i < 0$ . On vérifie aussitôt que

$$a_1 = -\frac{n-1}{2} < 0$$

on en déduit aussi que

$$a_2 = -2\frac{n-2}{2} < 0$$

De la même manière on obtient  $a_3 = -3\frac{n-3}{2}$ , etc., jusqu’à  $a_{m-1} = -(m-1)\frac{n-m+1}{2}$  et le dernier  $a_m = \frac{-\frac{1}{2}+a_{m-1}}{2}$  qui est  $< 0$  puisque  $a_{m-1}$  est  $< 0$  et aussi  $a_i < 0$  pour  $1 \leq i \leq m-1$ . Par la proposition 1.9.1 nous avons démontré le théorème suivant.

**Théorème 2.7.1.** *La série d’Eisenstein modifiée  $E_P^*(\phi, s)$  construite à partir de la représentation  $\Pi$  du sous-groupe de Levi  $M$ , induite à tout le groupe  $SO_{2n}$ , est de carré intégrable, donc elle appartient au spectre discret de  $SO_{2n}$ .*

## 2.8 Holomorphie et non nullité des opérateurs d’entrelacement

On a l’analogie du cas  $SO_8$ .

**Proposition 2.8.1.** *L’opérateur d’entrelacement pour la représentation  $\Pi$  du groupe  $SO_{2n}$  construite auparavant, est holomorphe et non nul pour les places archimédiennes et ramifiées.*

*Démonstration.* On va reprendre l’argument du chapitre 1. On a deux cas possibles.

1.  $\pi_v$  est une représentation tempérée. Comme avant, pour  $w \in W_G$ ,  $w$  admet une décomposition minimale disons  $w = w_{i_1} \dots w_{i_k}$ , et donc on peut factoriser l’opérateur d’entrelacement local associé à  $w$ ,  $M_v(w, \Pi)$  en  $k$  facteurs. Chaque opérateur est holomorphe car on est en situation de Langlands pour les paraboliques maximaux isomorphes à  $(GL_2)^m \subset GL_4 \times (GL_2)^{m-2}$  ou pour le parabolique maximal  $(GL_2)^m \subset SO_4 \times (GL_2)^{m-1}$ . En fait, on peut se restreindre parfaitement au sous-groupe  $GL_2 \times GL_2 \subset GL_4$  et au sous-groupe  $GL_2 \times GL_2 \subset SO_4 \times GL_2$ , où “se passe” l’opérateur d’entrelacement. Autrement dit, sous les autres copies de  $GL_2$  l’opérateur est constant. Alors on revient à la situation

$$Ind_{GL_2 \times GL_2}^P(\omega \times | \cdot |^s)$$

avec  $s$  réelle et positive. Donc Silberger et Borel-Wallach (on est dans le cas  $p$ -adique) montrent la convergence et donc l'holomorphie pour cet opérateur. Le théorème 1.10.2 entraîne la non nullité de l'opérateur car  $\pi_v$  possède un unique quotient irréductible, étant l'image de l'opérateur d'entrelacement.

Pour le cas particulier de  $w = w_0$ , on a l'holomorphie locale par étapes, pour le sous-groupe parabolique de rang relatif 1  $(GL_2)^m$  donc on a l'holomorphie de tout l'opérateur. Également, l'opérateur est non nul parce que son image est isomorphe au quotient de Langlands.

2.  $\pi_v$  non tempérée. Alors on peut supposer à torsion près par un caractère quadratique, qu'elle est sphérique. Or  $\pi_v$  est une représentation de  $GL_2$  et on sait que l'opérateur d'entrelacement "se passe" uniquement sur le sous-groupe  $M'$  contenu dans le parabolique  $P$ . Comme avant,  $M'$  est égal à  $GL_4$  ou bien  $SO_4 \times GL_2$ . Or la représentation  $\pi$  de  $GL_2$  (dont la composante est  $\pi_v$ ) est autoduale, donc on peut la considérer comme une induite

$$\pi = \text{Ind}_B^{GL_2}(|\cdot|^\sigma, |\cdot|^{-\sigma})$$

où  $B$  est le sous-groupe de Borel standard de  $GL_2$ . Ceci entraîne que l'on peut considérer notre induite totale comme une induite des sous-groupe de Borel et l'opérateur d'entrelacement agissant sur cette induite. C'est une induite de  $2m$  caractères  $\chi_1, \dots, \chi_{2m}$  (2 pour chaque  $\pi$ ). Par conséquent l'opérateur d'entrelacement se transforme en

$$M_v(w, \Pi)\phi_\Pi : \text{Ind}_{B_{M'}}^{M'}(\chi_1, \dots, \chi_{2m}) \rightarrow \text{Ind}_{B_{M'}}^{M'}(w\chi_1, \dots, w\chi_{2m})$$

Pour  $\pi_v$  sphérique il existe un vecteur  $e_v$  fixé par le sous-groupe compact maximal  $K_{M'}$  qui est une fonction appartenant à cette induite. Pour ce vecteur  $e_v$  on peut restreindre l'opérateur à  $K_{M'}/K_{M'} \cap B_{M'}$ . Or le calcul de Langlands donne un quotient de fonctions  $L, \frac{L(\sigma)}{L(\sigma+1)}$ , avec  $\sigma < \frac{1}{2}$  et le quotient converge absolument. Par suite l'opérateur est donné par une intégrale absolument convergente. Pour une fonction arbitraire dans l'induite  $\phi_\Pi$ , nous avons  $|\phi_{\Pi_v}| \leq C|e_v|$ , avec  $C$  réelle et  $\geq 0$ . Donc l'intégrale correspondante pour la fonction  $\phi_\Pi$  est absolument dominé par l'intégrale de  $e_v$ , qui entraîne la convergence de l'opérateur d'entrelacement pour  $\phi_\Pi$ . Nous avons la non nullité de l'opérateur car les fonctions  $L$  ne s'annulent pas, et il n'y a pas de pôle pour le dénominateur.

Si  $\pi_v$  est non tempérée et ramifiée, alors  $\pi_v = \pi_0 \otimes \epsilon_v$ , où  $\epsilon_v$  est un caractère d'ordre 2. Dans ce cas, on a

$$\text{Ind}_{(GL_2)^m}^G(\pi_v \otimes s) = \text{Ind}_{(GL_2)^m}^G(\pi_0 \otimes \epsilon_v \otimes s) = \text{Ind}_{(GL_2)^m}^G(\pi_0 \otimes s) \otimes \epsilon_v$$

et par transport de structure, nous avons l'holomorphie et non nullité de l'opérateur, l'action de  $\epsilon_v$  n'affecte pas ces conditions.

Pour la place à l'infini, on a pratiquement les mêmes arguments : si  $\pi_\infty$  est tempérée, alors le théorème de quotient de Langlands entraîne la convergence et non nullité de cet opérateur. Dans le cas où  $\pi_\infty$  n'est pas tempérée on considère l'induite par induction par étapes à partir des sous-groupe de Borel :  $\pi_\infty = \text{Ind}_B^{GL_2}(|\cdot|^\sigma, |\cdot|^{-\sigma})$  avec  $-\frac{1}{2} < \sigma < \frac{1}{2}$ . Or pour  $s$  petite comme dans notre cas, on

a convergence de l'opérateur car dans ce cas on a un quotient de fonctions  $\Gamma(s)$  et  $\Gamma(s + \sigma)$  qui sont des fonctions holomorphes en non nulles pour  $Re(s) > 0$ . Donc cet opérateur local est holomorphe et non nul.  $\square$

## 2.9 Existence d'un unique quotient pour $Ind_P^G(\Pi)$ . Cas général

Soit  $\mathcal{A}^2(SO_{2n})$  l'espace de formes automorphes de carré intégrable du groupe  $SO_{2n}$ . D'après le théorème 2.7.1, l'image de la représentation induite  $Ind_P^G(\Pi) = I = \otimes_v I_v$  par  $E^*$  est de carré intégrable. Cette image dans l'espace  $\mathcal{A}^2(SO_{2n})$  est une somme directe (discrète bien entendu) de représentations unitaires de  $G(\mathbb{A})$ . On va vérifier que chaque composant de l'induite  $I_v$  s'envoie sur un unique quotient irréductible, ce qui entraîne que toute l'induite globale s'envoie sur un unique quotient irréductible.

On sait déjà que si  $\pi_v$  est tempérée, alors  $I_v$  a un unique quotient irréductible. Si  $\pi_v$  est non tempérée, elle est sphérique à torsion près par un caractère d'ordre 2, ce qui nous ramène au cas sphérique par transport de structure. On va vérifier que dans ce cas, comme avant,  $I_v$  est cyclique, engendré par son vecteur non ramifiée  $e_v$ . On sait d'après l'argument donné dans le chapitre 1 que la cyclicité entraîne que  $E^*(I_v) \subset \pi_0$  où  $\pi_0$  est une représentation sphérique irréductible dans  $\mathcal{A}^2(SO_{2n})$ .

Or globalement, par l'argument du chapitre 1  $E^*$  s'annule sur les sous-modules de Langlands pour  $v$  tempérée et sur le sous-module de Kato. L'image de  $E^*$  est un module irréductible, produit tensoriel des modules quotients de Kato et Langlands.

Vérifions enfin, que les conditions de Kato du chapitre 1, théorème 1.11.1 sont satisfaites. Rappelons que l'on est ramené à démontrer pour toute racine  $\alpha > 0$

$$1 - p^{-1}\chi(a_\alpha) \neq 0 \quad (2.9)$$

voir le chapitre 1 pour les définitions et le théorème de Kato. Or le caractère  $\chi$  devient

$$\chi = (| \cdot |^{\frac{n-1}{2} + \sigma}, | \cdot |^{\frac{n-1}{2} - \sigma}, \dots, | \cdot |^{\frac{1}{2} + \sigma}, | \cdot |^{\frac{1}{2} - \sigma}) \quad (2.10)$$

Rappelons les racines positives ont la forme

$$\{X_i \pm X_j \mid i < j\}$$

Donc l'évaluation dans la coracine  $a_\alpha$  donne

$$\chi(a_\alpha) = |p|^{\frac{i}{2} \pm \sigma} |p|^{\frac{j}{2} \pm \sigma} \quad (2.11)$$

Or pour les racines de la forme  $X_i + X_j$  il est évident que la condition (2.9) est accomplie. Pour les racines de la forme  $X_i - X_j$  la condition (2.9) entraîne  $j/2 - i/2 = -1$  et donc on doit avoir  $j < i$  ce qui est impossible. Par suite, on a bien les conditions du théorème de Kato.

Pour la place archimédienne, on a le théorème de quotient de Langlands lorsque  $\pi_\infty$  est tempérée et donc on a bien un unique quotient. Si  $\pi_\infty$  n'est pas tempérée, on a le résultat de cyclicité analogue de Kato. Donc l'image de  $Ind_{\mathbb{P}}^G(\Pi)$  dans  $\mathcal{A}^2(SO_{2n})$  est irréductible et donc elle apparaît avec multiplicité 1.

Donc nous avons la généralisation du théorème 1.11.2 pour le groupe  $SO_{2n}$ .

**Théorème 2.9.1.** *Pour le groupe orthogonal  $SO_{2n}$  déployé sur  $\mathbb{Q}$  il existe des représentations résiduelles de carré intégrable (et qui appartiennent donc au spectre discret) formées à partir de séries d'Eisenstein modifiées et qui sont données par un paramètre elliptique d'Arthur; associées à la représentation induisante  $\pi \otimes |\det|^{\frac{n-1}{2}} \otimes \cdots \otimes \pi \otimes |\det|^{\frac{1}{2}}$ , où la matrice de Hecke associée dans le groupe dual  $\widehat{SO}_{2n}$  a la forme (1.16). De plus la donnée de  $\pi$  définit ainsi un unique sous-module irréductible  $E^*(Ind_{\mathbb{P}}^G(\Pi))$  dans l'espace  $\mathcal{A}^2(SO_{2n})$ .*

# Paramètres conjecturaux de $SO_{2n}$

## 3.1 Motivations

Soit  $G$  un groupe linéaire réductif connexe défini sur un corps de nombres  $F$ . Un problème classique et fondamental dans la théorie de formes automorphes est la description de la décomposition spectrale de la représentation régulière droite unitaire sur  $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$  de  $G(\mathbb{A})$ . A travers de résultats bien connus de analyse harmonique, cette représentation se décompose en somme hilbertienne

$$L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) = L_d^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) \hat{\oplus} L_{cont}^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) \quad (3.1)$$

de son spectre discret et son spectre continu. La théorie de séries d'Eisenstein permet de comprendre la partie continue à partir du spectre discret des sous-groupes de Levi et donc la question fondamentale qui se pose est la description détaillée du spectre discret  $L_d^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ . Ce spectre discret possède une décomposition orthogonale plus précise en

$$L_d^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) = L_{cusp}^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) \hat{\oplus} L_{res}^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) \quad (3.2)$$

où  $L_{cusp}^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$  est l'espace de formes cuspidales et  $L_{res}^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$  est le spectre résiduel (construit à partir des résidus des séries d'Eisenstein).

James Arthur a proposé une série de conjectures ([Art89], [Art83]) qui décrivent ce spectre discret à travers des paramètres ou  $A$ -paramètres  $\psi$ , homomorphismes du produit direct du groupe conjectural (parfois appelé groupe de Langlands)  $\mathcal{L}_F$  avec  $SL_2(\mathbb{C})$  dans le  $L$ -groupe  ${}^L G$  de  $G$

$$\psi : \mathcal{L}_F \times SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L G \quad (3.3)$$

considéré modulo conjugaison par  ${}^L G$ . Ce groupe conjectural  $\mathcal{L}_F$  ne guère connu en général, mais ce group devrait être une extension du groupe de Weil global  $W_F$ , avec une classe de conjugaison de plongements

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{F_v} & \longrightarrow & W_{F_v} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{L}_F & \longrightarrow & W_F \end{array}$$

On demande que la restriction au facteur  $SL_2$  soit une morphisme algébrique. On écrit  $\Psi(G)$  pour l'ensemble de classes conjugaison par  ${}^L G$  des paramètres d'Arthur pour  $G$ . Par restriction de (3.3) à chaque place  $v$  on obtient des paramètres locaux

$$\psi_v : \mathcal{L}_{F_v} \times SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L G_v \quad (3.4)$$

où  $\mathcal{L}_{F_v}$  est le groupe  $W_{F_v} \otimes SL_2(\mathbb{C})$  et  ${}^L G_v$  est le  $L$ -groupe de l'extension des scalaires  $G_v = G \otimes F_v$ .

La conjecture locale d'Arthur, associe à chaque  $\psi_v$  un ensemble fini  $\Pi_{\psi_v}(G_v)$  de classes d'isomorphisme de représentations unitarisables de  $G(F_v)$  appelé un  $A$ -paquet. Cet  $A$ -paquet pour toute place  $v$ , sauf un nombre fini, doit contenir une représentation non ramifiée  $\pi_v$ , de telle manière que le  $A$ -paquet se décompose comme  $\Pi_{\psi_v}(G_v) = \otimes \pi_v$  et  $\pi_v$  non ramifiée presque par tout. Les conjectures d'Arthur prédisent la multiplicité de chaque élément dans le spectre discret de la représentation régulière droite de  $G(\mathbb{A})$ .

Les conjectures d'Arthur visent à comprendre le spectre discret des groupes classiques à partir du spectre discret de  $GL_N$ . Arthur reformule les résultats de Moeglin et Waldspurger [M-W89] de telle manière qu'ils puissent être étendus aux groupes classiques. Arthur représente le spectre discret de  $GL_N$  par un ensemble d'objets formels.

**Définition 3.1.1.** On pose  $\Psi_2(GL_N)$  l'ensemble de produits tensoriels formels

$$\psi = r_n \otimes sp_m \quad (3.5)$$

où  $r_n$  est une représentation automorphe unitaire cuspidale et irréductible de  $GL_n$ , de degré  $n$  et  $sp_m$  dénote l'unique (à isomorphisme près) représentation irréductible de dimension  $m$  du groupe de Lie  $SL_2(\mathbb{C})$ , les entiers positifs  $n$  et  $m$  sont tels que  $N = nm$ .

On fixera désormais la notation  $sp_m$  pour cette représentation irréductible de dimension  $m$  de  $SL_2(\mathbb{C})$ . On rappelle que toute représentation irréductible de  $SL_2(\mathbb{C})$  est autoduale. Il est bien connu que  $sp_m$  est symplectique si  $m$  est paire et orthogonale si  $m$  est impaire. Pour un tel  $\psi = r_n \otimes sp_m$  on forme la représentation induite

$$Ind_P^G \left( \underbrace{(r_n \otimes \cdots \otimes r_n)}_m \delta_P^{\frac{1}{2}} \right) \quad (3.6)$$

de  $GL_N(\mathbb{A})$  où  $P$  est le sous-groupe parabolique standard du type  $(n, \dots, n)$  et  $\delta_P$  est le caractère du module de  $P$ . On note  $\pi_\psi$  l'unique quotient irréductible

de la représentation (3.6). Le résultat principal de Mœglin et Waldspurger dans [M-W89] établit que l'application  $\psi \mapsto \pi_\psi$  est une bijection de  $\Psi_2(GL_N)$  dans l'ensemble de représentations automorphes de  $GL_N$  qui apparaissent dans le spectre discret. On définit un ensemble de classes de conjugaison semisimples  $c(\psi)$ , pour  $S$  un ensemble fini contenant les places à l'infinie  $S_\infty$  et  $r_n$  est non ramifiée en dehors de  $S$  :

$$c(\psi) = \{c_v(\psi) \mid v \notin S\}$$

Les classes  $c_v(\psi)$  sont données par

$$c_v(\psi) = c_v(r_n)q_v^{\frac{n-1}{2}} \oplus \cdots \oplus c_v(r_n)q_v^{-\frac{n-1}{2}}$$

On voudrait représenter le spectre automorphe de  $GL_N$  par un ensemble plus grand d'objets formels.

**Définition 3.1.2.** On pose  $\Psi(GL_N)$  l'ensemble de sommes directes formelles (non ordonnées)

$$\psi = l_1\psi_1 \oplus \cdots \oplus l_r\psi_r \quad (3.7)$$

avec des éléments *différents*  $\psi_i = r(n_i) \otimes sp_{m_i} \in \Psi_2(GL_N)$ . Les  $N_i$  sont des entiers positifs de la forme  $N_i = n_i m_i$  tels que

$$N = l_1 N_1 + \cdots + l_r N_r = l_1 n_1 m_1 + \cdots + l_r n_r m_r$$

Pour  $\psi$  de la forme (3.7), on prend  $P$  le sous-groupe parabolique standard dont la composante de Levi est

$$M = \underbrace{(GL_{N_1} \times \cdots \times GL_{N_1})}_{l_1} \times \cdots \times \underbrace{(GL_{N_r} \times \cdots \times GL_{N_r})}_{l_r}$$

en on forme la représentation induite

$$\pi_\psi = \text{Ind}_P^G \left( \underbrace{(\pi_{\psi_1} \otimes \cdots \otimes \pi_{\psi_1})}_{l_1} \otimes \cdots \otimes \underbrace{(\pi_{\psi_r} \otimes \cdots \otimes \pi_{\psi_r})}_{l_r} \right) \quad (3.8)$$

Comme représentation induite de  $GL_N(\mathbb{A})^1$ ,  $\pi_\psi$  est irréductible [Ber84]. De la théorie des séries d'Eisenstein et du théorème 7.2 dans [Art05] on a que  $\psi \mapsto \pi_\psi$  est une bijection de  $\Psi(GL_N)$  dans l'ensemble de représentations irréductibles de  $GL_N(\mathbb{A})$  qui apparaissent dans la décomposition spectrale de l'espace  $L^2(GL_N(F) \backslash GL_N(\mathbb{A}))$ . Comme avant, on définit un ensemble de classes de conjugaison semisimples, pour  $S$  un ensemble fini tel que  $S_\infty \subset S$  et  $r_{n_i}$  est non ramifiée en dehors de  $S$  :

$$c(\psi) = \{c_v(\psi) \mid v \notin S\}$$

<sup>1</sup>À partir d'une représentation unitaire

Les classes  $c_v(\psi)$  dans  $GL_N$  sont données par

$$c_v(\psi) = \underbrace{(c_v(\psi_1) \oplus \cdots \oplus c_v(\psi_1))}_{l_1} \oplus \cdots \oplus \underbrace{(c_v(\psi_r) \otimes \cdots \otimes c_v(\psi_r))}_{l_r}$$

Un théorème profond de Jacquet et Shalika [J-S81] établit que la correspondance  $\psi \mapsto c(\psi)$  de  $\Psi(GL_N)$  dans l'ensemble de classes de conjugaison semi-simples dans  $GL_N(\mathbb{C})$  est injective.

On décrira certains paramètres dont on aura besoin pour la suite.

**Définition 3.1.3.** 1. Un paramètre  $\psi$  est *autodual* s'il est isomorphe à sa contragrediente comme représentation. On rappelle que pour  $k \geq 2$ , la représentation  $sp_k$  est autoduale.

2. Un paramètre  $\psi$  est *orthogonal* si est de la forme  $\psi = \sum m_i \otimes r_i$  où  $\psi$  satisfait

(a) Le paramètre  $\psi$  est autodual, ce qui entraîne que l'égalité des ensembles

$$\{(m_i, r_i)\} = \{(m_i, \tilde{r}_i)\}$$

avec multiplicités, bien entendu.

(b) On a l'égalité  $(m_i, r_i) = (m_i, \tilde{r}_i)$ , c'est-à-dire  $r_i \simeq \tilde{r}_i$  qui implique le fait suivant : si  $(m_i, r_i)$  intervient avec multiplicité impaire, alors  $sp_{m_i} \otimes r_i$  est une représentation orthogonale. Ce cas arrive si et seulement si on a  $m_i$  pair et  $r_i$  symplectique ou bien  $m_i$  impair et  $r_i$  orthogonale.

3. Un paramètre  $\psi$  est *discret* (au sens d'Arthur) si  $\psi$  n'est pas de la forme  $\psi = \phi \oplus \phi'$  tel que  $\phi'$  est le dual de  $\phi$ .

4. On dira que  $\psi$  est *primitif* si  $r = l_1 = m_1 = 1$ . Autrement dit  $\psi = r_{n_1}$  est une représentation cuspidale autoduale automorphe de  $GL_N$ . Dans ce cas  $\psi$  possède un caractère central  $\chi_\psi$  d'ordre 1 ou 2. Les paramètres de  $\Psi$  devraient correspondre à représentations de dimension  $N$ , autoduales du groupe  $\mathcal{L}_F \times SL_2(\mathbb{C})$ .

Un ingrédient essentiel des conjectures d'Arthur est la théorie d'endoscopie dont on va exposer brièvement les idées.

## 3.2 Endoscopie

Ces idées proviennent originalement de Labesse, Langlands et Shelstad. On va se placer maintenant dans le cadre d'un corps local  $k$ . On rappelle qu'une distribution dans  $G(k)$  est *invariante* si elle est stable par conjugaison. Parmi les exemples typiques se trouvent les intégrales orbitales

$$f_G(\gamma) = \int_{G_\gamma(k) \backslash G(k)} f(x^{-1}\gamma x) dx, \quad f \in C_c^\infty(G(k))$$



où  $\gamma$  est un élément régulier dans  $G(k)$ . Soit  $\gamma \in G(k)$ , on appelle  $\gamma_G$  la classe de conjugaison stable l'intersection de la classe de conjugaison de  $\gamma$  en  $G(\bar{k})$  avec  $G(k)$ . Cette classe stable  $\gamma_G$  est la réunion finie des classes  $\gamma_i$  dans  $G(k)$ . La *intégrale orbitale stable* est la somme

$$f^G(\gamma_G) = \sum_i f_G(\gamma_i) \quad (3.9)$$

Une distribution *stable* sur  $G(k)$  est une distribution invariante qui est dans l'espace linéaire engendré par les intégrales orbitales stables. Les groupes endoscopiques  $H$  sont définis lorsque  $k$  est local ou global. On rappelle que  ${}^L G$  est

$${}^L G = \widehat{G} \rtimes W_k$$

où le groupe de Weil agit sur  $\widehat{G}$  à travers le groupe de Galois  $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ . On fixe aussi une torsion intérieure

$$\eta : G \rightarrow G^*$$

où  $G^*$  est quasi-déployé sur  $k$ . Alors il y a une identification canonique entre les groupes  ${}^L G$  et  ${}^L G^*$ . Un groupe endoscopique  $H$  fait partie d'une donnée endoscopique  $(H, \mathbf{H}, s, \xi)$  pour  $G$ .  $H$  est un groupe quasi-déployé sur  $k$ ,  $\mathbf{H}$  est une extension déployée

$$1 \longrightarrow \widehat{H} \longrightarrow \mathbf{H} \longrightarrow W_k \longrightarrow 1$$

l'élément  $s$  est un semisimple dans  $\widehat{G}$  et  $\xi$  est un  $L$ -plongement de  $\mathbf{H}$  dans  ${}^L G$ . On demande que  $\xi(\widehat{H})$  soit le centralisateur connexe de  $s$  dans  $\widehat{G}$  et que

$$s\xi(h)s^{-1} = a(w(h))\xi(h), \quad h \in \mathbf{H}$$

où  $w(h)$  est l'image de  $h$  dans  $W_k$  et  $a(w(h))$  est un 1-cocycle de  $W_k$  dans  $Z(\widehat{G})$  qui est trivial si  $k$  est local ou localement trivial si  $k$  est global. On demande aussi que les actions de  $W_k$  sur  $\widehat{H}$  et  ${}^L H$  soient les mêmes modulo automorphisme intérieur. Deux données endoscopiques  $(H, \mathbf{H}, s, \xi)$  et  $(H', \mathbf{H}', s', \xi')$  sont dites équivalentes s'il existe des isomorphismes duaux  $\alpha : H \rightarrow H'$  et  $\beta : H' \rightarrow G$  avec un élément  $g \in \widehat{G}$  tels que

$$g\xi(\beta(h'))g^{-1} = \xi'(h')$$

et

$$gs g^{-1} = z\zeta' s'$$

où  $z \in Z(\widehat{G})$  et  $\zeta'$  est dans le centralisateur de  $\xi'(\mathbf{H})$  dans  $\widehat{G}$ . Finalement une donnée endoscopique est dite *elliptique* si  $\xi(\mathbf{H})$  n'est contenu dans aucun sous-groupe parabolique propre de  $G$ .

### 3.3 Paramètres dans le cas $SO_8$

On va analyser ce que prédit Arthur dans le cas des groupes orthogonaux. Considérons d'abord  $SO_8$ . *A priori* d'après Arthur un paramètre apparaissant dans le spectre discret, pour les places locales non ramifiées, possède la forme

$$\psi = \sum r_{n_i} \otimes sp_{m_i} \quad (3.10)$$

où ce paramètre est à image dans  $\widehat{SO}_8 = SO_8(\mathbb{C})$ , ce qui permet de réduire les possibles paramètres. Or ces paramètres ont comme matrice de Hecke, aux places non ramifiées, une matrice diagonal du type

$$t_p = \sum t_i \otimes sp_{m_i} = \begin{pmatrix} t_1 & & & & & & & \\ & t_2 & & & & & & \\ & & t_3 & & & & & \\ & & & t_4 & & & & \\ & & & & t_4^{-1} & & & \\ & & & & & t_3^{-1} & & \\ & & & & & & t_2^{-1} & \\ & & & & & & & t_1^{-1} \end{pmatrix} \in SO_8(\mathbb{C}) \quad (3.11)$$

Pour la représentation résiduelle construite dans le chapitre 1 les valeurs propres de sa matrice de Hecke on a l'estimation (sans l'hypothèse de Ramanujan pour  $GL_2$ )

$$|t_{p,\Pi}| \leq p^{\frac{3}{2}} \quad (3.12)$$

On va analyser les cas où ces paramètres ont de valeurs propres plus grands. Cela veut dire, on va analyser la présence de blocs du type  $sp_k$ , avec  $k \geq 4$ , dans d'autres paramètres. On connaît les valeurs propres des blocs  $sp_k$ , puisque ils sont donnés par les valeurs propres de la représentation triviale. D'ailleurs pour une représentation cuspidale de  $GL_n$ , on a les bornes suivantes

1.  $|t^{\pm 1}| < p^{\frac{1}{2}}$  (Jacquet-Shalika).
2.  $|t^{\pm 1}| < p^{\frac{1}{2} - \frac{1}{n^2+1}}$  (Luo, Rudnick, Sarnak).

Donc si on veut trouver des paramètres dont les valeurs propres de la matrice de Hecke, possédant taille au moins (3.12), il est nécessaire de considérer des blocs  $sp_k$ , avec  $k \geq 4$ . Pour  $SO_8$  on considère d'abord  $k = 4$ . Puisque  $sp_4$  est symplectique, si un tel bloc apparaît, alors il doit y avoir une autre représentation symplectique et la seule possibilité est un autre bloc  $sp_4$  en dualité avec le premier. Alors, en plus du paramètre étudié dans le chapitre 1, on a le paramètre

$$\psi = sp_4 \otimes \chi \oplus sp_4 \otimes \chi^{-1} \quad (3.13)$$

Mais le paramètre (3.13) n'est pas discret dans le sens d'Arthur car  $sp_4 \otimes \chi$  apparaît avec son dual et donc on peut éliminer ce cas.

Les blocs du type  $sp_6$  et  $sp_8$ , on peut les éliminer aussi, puisque ils sont symplectiques et ils peuvent pas apparaître dans  $SO_8(\mathbb{C})$ . Considérons le bloc  $sp_7$ . On pourrait trouver un paramètre comme ceci

$$\psi = \chi \otimes sp_7 \oplus \beta$$

où  $\beta$  est un caractère. On a les remarques suivantes.

1.  $\chi^2 = \beta^2 = 1$  par autodualité.
2. le déterminant doit être égal à 1 ce qui implique  $\chi = \beta$ .
3. Ce paramètre nous donne une représentation orthogonale.

La représentation est, en effet, orthogonal mais cette représentation est la représentation triviale de  $SO_8$  (tordue par un caractère) qui est résiduelle. Il nous reste donc, à considérer les blocs du type  $sp_5$  et les possibles paramètres que le contient.

On est ramené à l'étude des paramètres du type  $sp_5 +$  un reste  $r$ . Comme remarqué il est impossible d'avoir le paramètre  $sp_5 \oplus sp_2 \oplus r_1$ , parce que  $sp_2$  est symplectique et donc le paramètre n'appartient pas au  $SO_8$ . Les possibilités sont

1. La paramètre  $\psi = sp_5 \oplus \epsilon_1 \oplus \epsilon_2 \oplus \epsilon_3$ , avec  $\epsilon_i$  des caractères d'ordre 2. A cause de l'autodualité et que le déterminant vaut 1, l'un des caractères est 1, ce qui nous ramène à  $\psi = sp_5 + 1 + \epsilon + \epsilon^{-1}$ . Ce qui nous donne la représentation triviale de  $SO_6$  plus une somme de caractères. Ce paramètre est celui que l'on va analyser de façon détaillée.
2.  $\psi = \epsilon \otimes sp_5 \oplus r_3$ , où  $\epsilon$  est un caractère d'ordre 2 par raisons d'autodualité,  $r_3$  est une représentation cuspidale orthogonale de degré 3, donc a une matrice de Hecke (places non ramifiées) de la forme  $diag(t, 1, t^{-1})$ , et on est ramené au cas précédent.
3.  $\psi = \epsilon \otimes sp_5 \oplus r_2 \oplus \epsilon_1$ . Ici  $\epsilon$  est un caractère d'ordre 2,  $r_2$  est une représentation cuspidale orthogonale de degré 2,  $\epsilon_1$  est un caractère d'ordre 2. Or,  $r_2$  est une représentation orthogonale mais pas forcément spéciale orthogonale. La condition sur le déterminant entraîne

$$\epsilon^5(\det r_2)\epsilon_1 = 1$$

et alors le déterminant de  $r_2$  et d'ordre 2 au plus.

On a trouvé des paramètres qui peuvent avoir des valeurs propres de Hecke plus grandes en valeur absolue. Une question intéressante est si tels paramètres peuvent être cuspidaux.

Les seuls paramètres intéressants à considérer sont donc du type  $sp_5 \otimes \epsilon \oplus$  un reste. Rappelons que notre intérêt est comprendre les valeurs propres de ces paramètres et donc il nous suffit de décrire explicitement leur matrices de Hecke (places non ramifiées).

En vue de la discussion précédente, on va étudier le paramètre donné par la représentation induite  $Ind_{SO_6 \times \mathbb{G}_m N}^{SO_8}(\mathbf{1} \otimes \epsilon \otimes \chi)$ . Sa matrice de Hecke dans les

places non ramifiées est donnée (à conjugaison près) par

$$t_p = \begin{pmatrix} \chi & \\ & \chi^{-1} \end{pmatrix} \oplus \text{triv}_{SO_6} = \begin{pmatrix} \chi & \\ & \chi^{-1} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} p^2 & & & & & \\ & p & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & p^{-1} & \\ & & & & & p^{-2} \end{pmatrix}$$

### 3.4 Description du cas $SO_{2n}$

Pour le cas général la situation combinatoire est plus compliquée et donc on va donner une réponse partielle, pour l'instant, signalant quelques paramètres distingués. En général la philosophie d'Arthur reste la même, c'est-à-dire un paramètre sera du type

$$\psi = \sum r_i \otimes sp_{n_i} : \mathcal{L}_{\mathbb{Q}} \times SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_{2n}(\mathbb{C}) \quad (3.14)$$

Comme dans le cas de  $SO_8$  on a des bornes pour les valeurs propres de Hecke du paramètre étudié dans le chapitre 2. A savoir les bornes sont

1.  $|t_{\pi,p}| \leq p^{\frac{n-2}{2}}$  pour notre paramètre  $\Pi$  du chapitre 2.

Il suffit donc de considérer paramètres ayant de blocs du type  $sp_k$  avec  $k \geq n$ . Ce type de représentations peut avoir des valeurs propres de Hecke plus grands. Ces paramètres ont la forme  $\epsilon \otimes sp_k + \text{reste}$ . Bien sûr dans le reste on peut avoir de sous-blocs  $sp_{n_i} \otimes r_i$  avec  $n_i \leq n$ , mais de manière que tout le paramètre doit être orthogonal.

Regardons d'abord le cas  $k = n$  il y a un seul paramètre à considérer en plus du paramètre du chapitre 2, à cause de l'auto-dualité. Le paramètre en question est

$$\psi = \epsilon \otimes sp_n \oplus \epsilon' \otimes sp_n \quad (3.15)$$

Mais (3.15) n'est pas discret au sens d'Arthur, comme on l'avait déjà remarqué puisque apparaît un paramètre avec son dual.

Désormais on considère les paramètres contenant un bloc du type  $sp_k$ , avec  $k \geq n + 1$ . On peut commencer par exclure des cas faciles. Si  $k$  est pair alors  $sp_k$  est symplectique, donc pour  $k \geq n + 1$  et  $k$  pair ceci est impossible parce que  $\widehat{G} = SO_{2n}(\mathbb{C})$ . Si  $k$  est impair alors  $sp_k$  est orthogonal. Tous ces paramètres ont de valeurs propres de Hecke qui sont plus grands, mais ces paramètres sont *singuliers*, dans un sens que l'on va préciser plus tard. La conséquence principale de cette singularité sera que ces paramètres doivent apparaître dans le spectre résiduel.

Dans les chapitres suivants on va traiter tous les paramètres du type

$$\psi = \epsilon \otimes sp_m \oplus \text{reste}, \quad m \geq n + 1 \quad (3.16)$$

et on verra que ces paramètres ne sont pas cuspidaux.

---

# Paramètres discrets singuliers

Une question naturelle qui se pose est la possible existence de paramètres d'Arthur dont les matrices de Hecke dans les places non ramifiées ont des valeurs propres plus grandes que la représentation induite  $\Pi$  construite dans le chapitre 1 et 2. Ces types de paramètres existent bien sûr, mais *a priori* on ne sait pas, même en supposant les conjectures d'Arthur, s'ils apparaissent dans le spectre résiduel ou dans le spectre cuspidal. Dans ce chapitre on fera l'analyse des certains paramètres et on va montrer que ceux-ci sont singuliers, dans un sens défini par Li [Li89]. Cette méthode consiste en le calcul de la restriction de la représentation à sous-groupe unipotent d'un sous-groupe parabolique maximal de Siegel. On calcule des coefficients de Fourier globaux d'une fonction arbitraire dans l'induite restreinte, on va expliciter la forme des caractères qui interviennent dans cette restriction. Le résultat principal est que ces paramètres sont singuliers et donc ils ne peuvent pas être cuspidaux d'après Li [Li89]. Remarquons que dans tout ce chapitre, on suppose vérifiées les conjectures d'Arthur ([Art05]).

## 4.1 Paramètres de $SO_8$

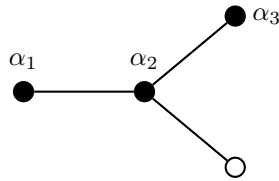
Dans la construction de nos représentations induites, on part toujours de blocs du type  $GL_2 \times GL_2$  pour induire au groupe  $SO_8$ . La représentation induite qui résulte a un quotient apparaissant dans le spectre résiduel d'après le théorème 1.11.2 Alors la question qui se pose est de savoir si d'autres paramètres discrets cuspidaux construits à partir de blocs  $sp_{n_i}$  apparaissent, c'est-à-dire, à partir de la représentation irréductible de degré  $n_i$  de  $SL_2(\mathbb{C})$ , avec  $n_i > n$ . Dans le cas

de  $SO_8$  on peut répondre complètement à cette question. Comme il a été signalé dans le chapitre précédent, dans le cas de  $SO_8$  on a réduit le problème à l'étude du paramètre  $Ind_{SO_6 \times \mathbb{G}_m N}^{SO_8}(\epsilon \otimes \mathbf{1}) \otimes \chi|_{N_Q}$ , où  $SO_6 \times \mathbb{G}_m N$  est un sous-groupe parabolique de  $SO_8$  et l'induction est unitaire. À l'aide de la théorie de Mackey ([Lip74],[Mac78]), on va suivre la méthode développée par Duke, Howe et Li [DHL92].

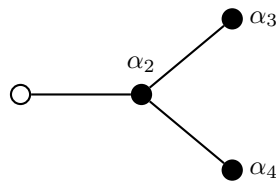
On va étudier avec cette méthode la restriction de la représentation induite locale

$$Ind_{SO_6 \times \mathbb{G}_m N}^{SO_8}(\epsilon \otimes \mathbf{1}) \otimes \chi$$

au sous-groupe  $N_Q$ , radical unipotent du parabolique maximal de Siegel. On rappelle que  $\mathbf{1}$  est la représentation triviale de  $SO_6$  et  $(\epsilon \otimes \mathbf{1})$  est une représentation autoduale du groupe  $SO_6$ , ce qui implique que  $\epsilon$  est d'ordre 2. Le caractère  $\chi$  est un caractère de  $\mathbb{G}_m$  que, pour l'instant, on suppose unitaire. Le sous-groupe  $N_Q$  est le radical unipotent du sous-groupe parabolique maximal  $Q$  isomorphe à  $GL_3$  engendré par les racines  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  du diagramme  $\mathcal{D}_4$  (groupe  $SO_8$ ).



Soit  $P$  le sous-groupe parabolique isomorphe à  $SO_6$  engendré par les racines  $\alpha_2, \alpha_3$  et  $\alpha_4$ . Dans le diagramme  $P$  est donné par :



Pour le calcul de la restriction de cette induite on fera appel à la théorie de Mackey. La théorie de Mackey concerne les induites unitaires. Notre représentation induite est bien unitaire.

La théorie de Mackey, dans le cas des représentations induites donne la forme de la restriction d'une représentation induite en termes de doubles classes.

Rappelons que deux sous-groupes fermés  $G_1$  et  $G_2$  de  $G$  sont dites *régulièrement associés* s'il existe une suite  $E_0, E_1, E_2, \dots$  d'ensembles mesurables telle que chaque  $E_i$  est la réunion des  $G_1 \backslash G / G_2$  doubles classes,  $E_0$  a mesure zéro et toute double classe sauf  $E_0$  est l'intersection des  $E_i$  qui la contiennent.

**Théorème 4.1.1.** *Soient  $G_1$  et  $G_2$  sous-groupes de  $G$  régulièrement associés dans  $G$ . Soit  $\pi$  une représentation de  $G_1$ . Pour tout  $x \in G$  on considère  $G_x = G_2 \cap (x^{-1}G_1x)$  et on pose*

$$V_x = \text{Ind}_{G_x}^{G_2}(\eta \rightarrow \pi(x\eta x^{-1}))$$

Alors  $V_x$  est déterminé à équivalence près par la double classe  $\bar{x}$  à laquelle  $x$  appartient. Si  $\mu$  est une mesure admissible sous le double quotient  $G_1 \backslash G / G_2$ , alors

$$\text{Ind}_{G_1}^G(\pi)|_{G_2} \simeq \int_{G_1 \backslash G / G_2}^{\oplus} V_{\bar{x}} d\mu(\bar{x})$$

Pour la démonstration voir Lipsman [Lip74] ou Mackey [Mac78].

Or, notre problème est de calculer les doubles classes  $N \backslash SO_8 / P$ . On va calculer d'abord les doubles classes  $Q \backslash SO_8 / P$ . Les sous-groupes paraboliques  $Q$  et  $P$  sont des groupes paraboliques standard, contiennent donc un sous-groupe de Borel standard  $B$ . Soit  $\Delta$  l'ensemble des racines simples (positives) associées au choix de ce groupe de Borel.

On note  $\Theta$  et  $\Omega$  les sous-ensembles de l'ensemble des racines simples  $\Delta$ , qui engendrent le sous-groupes de Levi de  $Q$  et  $P$  respectivement.

$$\Theta = \{X_1 - X_2, X_2 - X_3, X_3 - X_4\}, \quad \Omega = \{X_2 - X_3, X_3 - X_4, X_3 + X_4\}$$

Soit  $\Sigma^+$  l'ensemble de toutes les racines positives engendrées par  $\Delta$ . Pour  $SO_8$  on a

$$\Sigma_{SO_8}^+ = \begin{cases} X_i - X_j & 1 \leq i < j \leq 4 \\ X_i + X_j & 1 \leq i < j \leq 4 \end{cases}$$

Notons par  $\Sigma_{\Omega}^+$  et  $\Sigma_{\Theta}^+$  les racines positives engendrées par  $\Omega$  et  $\Theta$  respectivement. Dans le cas de  $SO_8$  on peut les écrire explicitement.

$$\Sigma_{\Theta}^+ = \begin{cases} X_1 - X_2 & X_1 - X_3 \\ X_2 - X_3 & X_2 - X_4 \\ X_3 - X_4 & X_1 - X_4 \end{cases} \quad \Sigma_{\Omega}^+ = \begin{cases} X_2 - X_3 & X_2 + X_3 \\ X_3 - X_4 & X_2 - X_4 \\ X_3 + X_4 & X_2 + X_4 \end{cases}$$

Il nous sera utile de calculer les sous-groupes unipotents de  $Q$  et  $P$  à l'aide de sa décomposition par rapport aux racines. Ainsi on a

$$N_Q = \prod_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma_{\Theta}^+} N_{\alpha} \quad N_P = \prod_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma_{\Omega}^+} N_{\alpha}$$

On peut calculer explicitement les ensembles  $\Sigma^+ \setminus \Sigma_\Omega^+$  et  $\Sigma^+ \setminus \Sigma_\Theta^+$

$$\Sigma^+ \setminus \Sigma_\Theta^+ = \begin{cases} X_1 + X_2 & X_2 + X_3 \\ X_1 + X_3 & X_3 + X_4 \\ X_1 + X_4 & X_2 + X_4 \end{cases} \quad \Sigma^+ \setminus \Sigma_\Omega^+ = \begin{cases} X_1 - X_2 & X_1 + X_2 \\ X_1 - X_3 & X_1 + X_3 \\ X_1 - X_4 & X_1 + X_4 \end{cases}$$

On pose  $W_\Theta$  et  $W_\Omega$  le groupes de Weyl de  $P$  et  $Q$  respectivement. Or il y a une bijection canonique

$$Q \setminus G/P \longrightarrow W_\Theta \setminus W/W_\Omega$$

voir par exemple [Cas]. En fait, plus précisément on a

**Proposition 4.1.2.** *Si  $\Theta, \Omega$  sont des sous-ensembles de  $\Delta$  on a une décomposition de  $G$  comme*

$$G = \coprod P_\Theta w P_\Omega$$

avec des notations évidents et  $w$  dans l'ensemble de représentants de  $W_\Theta \setminus W/W_\Omega$ .

*Démonstration.* Voir [Cas]. □

On va calculer les représentants de  $W_\Theta \setminus W/W_\Omega$ . Dans le célèbre manuscrit jamais publié de Casselman [Cas], on trouve un résultat qui permet de choisir des représentants de longueur minimale.

**Lemme 4.1.3.** *Soient  $\Theta, \Delta$  des sous-ensembles non vides de  $\Delta$ . Alors dans toute double classe de  $W_\Theta \setminus W/W_\Omega$  il existe un unique élément  $w$  caractérisé par les propriétés équivalentes suivantes :*

1. *L'élément  $w$  a une longueur minimale dans  $W_\Theta \setminus W/W_\Omega$ .*
2.  *$w$  a une longueur minimale dans  $W_\Theta \setminus W$  et aussi dans  $W/W_\Omega$ .*
3.  *$w^{-1}\Theta > 0, \quad w\Omega > 0$ .*

On va utiliser la caractérisation 3 pour trouver les représentants. On rappelle que  $W = S_4 \rtimes S(\pm 1)$ . Or il est clair que l'élément neutre 1 satisfait les conditions

$$1\Theta > 0, \quad 1\Omega > 0$$

Par inspection on trouve l'autre élément  $w$  qui satisfait les conditions précédentes. C'est l'élément  $w = (1, 4, 3, 2)(1, 1, -1, -1)$ . Explicitement pour les racines de  $\Omega$  on a

1.  $(1, 4, 3, 2)(1, 1, -1, -1)(X_2 - X_3) = X_1 + X_2 > 0$ .
2.  $(1, 4, 3, 2)(1, 1, -1, -1)(X_3 - X_4) = X_2 + X_3 > 0$ .
3.  $(1, 4, 3, 2)(1, 1, -1, -1)(X_3 + X_4) = X_2 + X_3 > 0$ .

D'ailleurs l'action de  $w^{-1} = (1, 2, 3, 4)(-1, -1, 1, 1)$  sur  $\Theta$  donne

1.  $(1, 2, 3, 4)(-1, -1, 1, 1)(X_1 - X_2) = X_2 + X_3 > 0$ .
2.  $(1, 2, 3, 4)(-1, -1, 1, 1)(X_2 - X_3) = X_3 + X_4 > 0$ .
3.  $(1, 2, 3, 4)(-1, -1, 1, 1)(X_3 - X_4) = X_2 + X_3 > 0$ .



C'est le seul élément de  $W$  qui satisfait 3 du lemme 4.1.3. Donc on a uniquement deux doubles classes. Pour faciliter les calculs pour la restriction de l'induite on utilisera comme représentant de la deuxième classe l'élément  $w_0 = 1(-1, -1, -1, -1)$ . Donc on a les doubles classes

$$Q1P \text{ et } Qw_0P$$

D'après un théorème bien connu, que l'on trouvera par exemple dans l'article de Bernstein et Zelevinsky ([BZ77] 1.5) on a toujours une orbite ouverte et une orbite fermée. Toute double classe est une orbite. Dans notre cas l'orbite  $Q1P$  est clairement fermée et donc l'orbite  $Qw_0P$  est automatiquement ouverte. Un autre argument géométrique simple nous dit qu'il faut compter les dimensions. Par suite, on va calculer la dimension de l'orbite  $Qw_0P$  et on verra qui a la même dimension que  $SO_8$ .

Le sous-groupe  $SO_8$  a pour dimension 28.

D'ailleurs, la double classe  $Qw_0P$ , peut être écrite comme

$$Qw_0P = N_Q M_Q w_0 M_P N_P = N_Q M_Q M_P \overline{N}_P w_0 \quad (4.1)$$

où  $\overline{N}_P$  est le radical unipotent du sous-groupe opposé  $\overline{P}$  de  $P$ . Cette décomposition n'est pas unique, le terme  $m_Q m_P$  est bien défini modulo l'ambiguïté

$$M_Q M_P \simeq M_Q \times M_P / M_Q \cap M_P$$

Donc le calcul final de la dimension donne :

$$\dim Qw_0P = 22 + 3 + 3 = 28$$

**Remarque 4.1.4.** Pour le calcul de la restriction de l'induite il ne faut prendre en compte que la double classe  $Qw_0P$  qui est ouverte. La double classe  $Q1P$  étant fermée est de mesure zéro et donc négligeable ([Lip74], chapitre II, §1 ou voir [Mac78] page 123).

En appliquant la théorie de Mackey on doit calculer en principe une intégrale sur  $N_Q \backslash SO_8 / P$ , pour la classe de mesure définie par Lipsman ([Lip74], chapitre II) d'une représentation

$$x \rightarrow \text{Ind}_{N_Q \cap x P x^{-1}}^{N_Q} ({}^x \epsilon \otimes \chi)$$

On rappelle que  $\epsilon \otimes \chi$  dans ce cas est un caractère de  $P$  et la notation exponentielle indique conjugaison. Or l'élément  $w_0$  normalise les groupes de Levi et donc on peut écrire la double classe comme

$$Qw_0P = Q\overline{P}w_0$$

Pour l'observation 4.1.4 les  $x \in SO_8$  que l'on doit considérer se trouvent dans la double classe  $Qw_0P$ . Or, pour  $x \in Qw_0P$  on peut écrire  $x = n_Q m_Q w_0 p$  avec des notations évidentes. Et donc modulo  $N_Q$  on a

$$x \equiv m_Q w_0 p \pmod{N_Q}$$

avec des ambiguïtés peut être car la l'écriture n'est pas unique en général. On a alors la représentation induite

$$Ind_{N_Q \cap m_Q w_0 P w_0 m_Q^{-1}}^{N_Q} ({}^y(\epsilon \otimes \chi)), \quad y = m_Q w_0 \quad (4.2)$$

On sait que  $m_Q$  normalise  $N_Q$  et ceci entraîne

$${}^{m_Q^{-1}} Ind \simeq Ind_{N_Q \cap w_0 P w_0}^{N_Q} ({}^{w_0}(\epsilon \otimes \chi))$$

$M_Q$  opère naturellement sur  $N_Q = \Lambda^2(F^4)$  comme le groupe  $GL_4$  et  $\widehat{N_Q} = \Lambda^2(F^{4*})$ . Alors une forme  $f \in \Lambda^2(F^{4*})$  est dégénérée si et seulement si  ${}^m f$  est dégénérée. De même pour les caractères de groupes.

On est ramené donc à l'induite

$$Ind_{N_Q \cap w_0 P w_0}^{N_Q} ({}^{w_0}(\epsilon \otimes \chi)) \quad (4.3)$$

Par suite, il faut calculer

$$N_Q \cap w_0 P w_0 = N_Q \cap M_P \overline{N_P} = N_Q \cap M_P$$

Il est utile de calculer cette intersection en termes de racines.

On voit aussitôt que l'intersection comprend les racines  $X_2 + X_3, X_2 + X_4, X_3 + X_4$ . Posons  $A$  l'ensemble

$$A = \{X_2 + X_3, X_2 + X_4, X_3 + X_4\} \quad (4.4)$$

et soit  $N_A = \prod_{\alpha \in A} N_\alpha$ . De plus  $\epsilon \otimes \chi$  est un caractère de  $M_P = SO_6 \times \mathbb{G}_m$ , trivial sur le groupe dérivé  $SO_6^+$  et donc trivial sur le sous-groupe unipotent  $N_Q$ . Donc la restriction de l'induite devient

$$Ind_{N_A}^{N_Q} (\mathbf{1}) = m_1 L^2(N_Q/N_A) \quad (4.5)$$

où  $m_1$  est la multiplicité de  $\mathbf{1}$  (la représentation triviale). Alors les composantes continues de (4.5) sont les caractères du groupe abélien  $N_Q$  triviaux sur  $N_A$ , que l'on va considérer comme des formes linéaires sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{n}_Q$  triviales sur  $\mathfrak{n}_A$ .

## 4.2 Singularité des formes dans $\mathfrak{n}_Q/\mathfrak{n}_A$

Howe dans son article [How84] a défini des coefficients de Fourier pour des représentations du groupe symplectique à l'aide de la théorie des formes de Siegel. Li dans [Li89] définit en général des coefficients de Fourier pour des groupes classiques qui laissent stable une forme bilinéaire hermitienne ou anti-hermitienne. Cette définition s'applique à notre groupe orthogonal déployé.

Soit  $V = \mathbb{Q}^8$  ou  $V = \mathbb{Q}^{2n}$ . Soient  $X, Y$  des espaces totalement isotropes maximaux qui sont en dualité non dégénérée par la forme  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On utilisera la notation  $G$  pour dénoter le groupe  $SO_{2n}$  ou bien le groupe  $SO_8$ . Puisque la forme

quadratique associé à nos groupes est  $x_1x_8 + x_2x_7 + x_3x_6 + x_4x_5$  (cas  $SO_8$ ) et  $x_1x_{2n} + \dots + x_nx_{n+1}$  (cas de  $SO_{2n}$ ), les deux espaces totalement isotropes sont faciles à décrire : dans le cas  $SO_8$  on a  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, 0, 0, 0, 0)$  et  $Y = (0, 0, 0, 0, x_5, x_6, x_7, x_8)$  avec  $x_i \in \mathbb{Q}$ . Le cas de  $SO_{2n}$  est analogue. Soit  $Q$  le sous-groupe parabolique maximal de  $G$  qui préserve  $X$ . Le radical unipotent  $N$  est un groupe abélien. Le groupe  $N$  est isomorphe à l'espace vectoriel  $B(Y)$  de toutes les formes bilinéaires antisymétriques sur  $Y$ . L'espace dual de  $B(Y)$  est isomorphe à  $B(X)$  de manière naturelle. Supposons que l'on a fixé un caractère additif  $\psi$  de  $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ . Le dual de Pontriagin de  $N(\mathbb{A})/N(\mathbb{Q})$  est identifié avec  $B(X)$ . Pour  $T \in B(X)$  soit  $\psi_T$  le caractère correspondant de  $N(\mathbb{A})/N(\mathbb{Q})$ . Soit  $\phi$  une fonction lisse dans  $\mathcal{L}^2(G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}))$ . Soit  $\phi_T$  le coefficient de Fourier le long de  $N$  définit par

$$\phi_T(g) = \int_{N(\mathbb{A})/N(\mathbb{Q})} \phi(zg) \overline{\psi_T(z)} dz \quad g \in SO_{2n}(\mathbb{A}) \quad (4.6)$$

On veut montrer que tout coefficient de Fourier (global) donné par (4.6) est un élément dégénéré dans  $(N(\mathbb{Q}) \backslash N(\mathbb{A}))$ .

Soit  $V$  un espace totalement isotrope de  $SO_8$ , que l'on rappelle être défini par la matrice antidiagonale  $\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \cdot & \\ & \cdot & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$  dans  $\mathbb{Q}^8 = W$ . Dans tout ce paragraphe on va suivre de près l'article de Duke, Howe et Li [DHL92]. Alors  $Q$  est le sous-groupe parabolique de  $SO_8$  qui stabilise le sous-espace  $V$  totalement isotrope pour la forme quadratique associée. Soit  $Y \subset \mathbb{Q}^8$  un sous-espace totalement anisotrope pour cette forme. Alors on a

$$Q = GL(Y)N_Q \simeq GL_4 N_Q$$

On sait déjà que  $N_Q$  est un sous-groupe unipotent. En fait  $N_Q$  consiste de matrices de la forme

$$n(a) = \begin{pmatrix} 1_4 & a \\ & 1_4 \end{pmatrix}$$

où  $a$  est une matrice alternée de  $4 \times 4$ . Ainsi on peut établir une correspondance

$$n(a) \mapsto a$$

qui identifie  $N_Q$  au groupe de matrices alternées  $4 \times 4$ .

Alors, par passage à l'algèbre de Lie

$$N_Q = \Lambda^2(V) \quad \text{et} \quad \widehat{N}_Q = \Lambda^2(V^*)$$

On va démontrer l'analogie local du résultat de Howe, Duke et Li.

**Proposition 4.2.1.** *Soit  $\rho = \text{Ind}_{SO_6 \times G_m N}^{SO_8}(\epsilon \otimes \mathbf{1} \otimes \chi)$ , avec  $\chi$  un caractère unitaire. Fixons  $\psi$  un caractère additif non trivial de  $\mathbb{Q}_p$ . Soit  $\xi$  un caractère de  $N_Q(\mathbb{Q}_p)$  apparaissant dans la décomposition spectrale de  $\rho|_{N_Q}$ . On peut écrire  $\xi(x) = \psi((X, \lambda))$ , où  $x \in N_Q$ ,  $x = \exp(X)$ ,  $X \in \mathfrak{n}_Q$  (l'algèbre de Lie de  $N_Q$ ), et  $\lambda \in \mathfrak{n}_Q^* \simeq \Lambda^2(V^*)$  (l'espace de formes alternées sur  $V$ ). Alors la forme  $\lambda$  est dégénérée (et on dira alors que le caractère  $\xi$  est dégénéré).*

*Démonstration.* L'espace totalement isotrope  $V$  se construit à partir d'une base  $\langle e_1, \dots, e_4 \rangle$ . Si  $\xi$  intervient dans la décomposition spectrale,  $\lambda$  est un élément de  $\widehat{\mathfrak{n}}_Q$  trivial sur  $\mathfrak{n}_A$ . D'après la forme des racines dans l'ensemble  $A$  défini dans (4.4),  $\mathfrak{n}_A$  est engendré par

$$\mathfrak{n}_A = \langle e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4 \rangle$$

et donc  $\lambda$  est trivial sur  $e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4$ .

On peut écrire la forme  $\lambda$  dans la base duale de  $\Lambda^2(V)$  comme une matrice alternée de la forme

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} \\ -\lambda_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_{14} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Il est évident que le déterminant de la matrice (4.7) vaut zéro et par suite la forme  $\lambda$  est dégénérée.  $\square$

**Corollaire 4.2.2.** *Une représentation globale ayant comme facteur local dans la place  $p$  la représentation locale  $\text{Ind}_{SO_6 \times G_m N}^{SO_8}(\epsilon \otimes \mathbf{1} \otimes \chi)$  est résiduelle.*

Pour la démonstration de ce corollaire on a besoin d'un lemme énoncé et démontré par Howe ([How84], lemma 2.4) dans le cas du groupe symplectique. La démonstration de Howe marche aussi pour le cas du groupe orthogonal déployé.

**Lemme 4.2.3** (Howe). *Soit  $\phi \in L^2(SO_{2n}(\mathbb{Q}) \backslash SO_{2n}(\mathbb{A}))$ . Sont équivalents*

1. *Le rang de  $\phi$  est au plus  $k$  (le rang des coefficients globaux, au sens précédent).*
2. *Dans la représentation par translation à droite de  $SO_{2n}(\mathbb{A})$  sur le sous-espace de  $L^2(SO_{2n}(\mathbb{Q}) \backslash SO_{2n}(\mathbb{A}))$  engendré par  $\phi$ , tous les sous-groupes locaux  $SO_{2n}(\mathbb{Q}_p)$  agissent par représentations de rang  $\leq k$ , où le rang est le rang des coefficients globaux, au sens précédent.*
3. *Dans la représentation par translation à droite de  $SO_{2n}(\mathbb{A})$  sur le sous-espace de  $L^2(SO_{2n}(\mathbb{Q}) \backslash SO_{2n}(\mathbb{A}))$  engendré par  $\phi$ , il existe un premier  $p$  tel que  $SO_{2n}(\mathbb{Q}_p)$  agit par une représentation de rang  $\leq k$ .*

*Démonstration.* Soit  $Y$  le sous-espace fermé de  $L^2(SO_{2n}(\mathbb{Q}) \backslash SO_{2n}(\mathbb{A}))$  engendré par les translatés à droite de  $\phi$  par  $SO_{2n}(\mathbb{A})$ . Soit  $\phi'$  une fonction continue sur  $Y$  (la convolution à droite par des fonctions continues à support compact montre que les fonctions continues sur  $Y$  sont denses dans  $Y$ ). Soit  $Q$  le sous-groupe parabolique de Siegel et  $N_Q$  son radical unipotent. Soit  $f \in C_c^\infty(N_Q(\mathbb{Q}_p))$  pour un  $p$  et considérons  $R(f)\phi'$  défini par

$$R(f)(\phi')(g) = \int_{N_Q(\mathbb{Q}_p)} \phi'(gn_p) f(n_p) dn_p$$

Alors  $R(f)\phi'$  est aussi continue. Si  $g \in GL_n(\mathbb{A}) \subset Q(\mathbb{A})$  (ou bien  $GL_4(\mathbb{A})$  dans le cas de  $SO_8$ ) on peut calculer aisément l'effet de  $R(f)$  dans le développement de Fourier de  $\phi'$  évalué en  $g$ . On a

$$(R(f)\phi')_T(g) = \widehat{f}(-Ad^*g^{-1}(T))\phi'_T(g) \quad (4.8)$$

où  $\widehat{f}$  est la transformée de Fourier de  $f$ . La fonction  $\widehat{f}$  est en principe définie sur  $\widehat{N(\mathbb{Q}_p)}$ , mais via l'application de projection  $\widehat{N(\mathbb{Q}_p)} \rightarrow \widehat{N(\mathbb{A})}$ , on peut la considérer comme fonction sur  $\widehat{N(\mathbb{A})}$ . Supposons maintenant que  $\widehat{f}$  s'annule dans la sous-variété de  $\widehat{N(\mathbb{Q}_p)} \simeq \Lambda_n^2(\mathbb{Q}_p)$  qui consiste des matrices de rang au plus  $k$ . Alors le pull-back de  $\widehat{f}$  à  $\widehat{N(\mathbb{A})}$  s'annule dans le sous-ensemble des éléments dans  $\widehat{N(\mathbb{A})}$  dont la composante dans  $\Lambda_n^2(\mathbb{Q}_p)$  possède rang au plus  $k$ . En particulier, si  $\phi$  a au plus rang  $k$ , il en est de même pour  $\phi'$  et de (4.8) on a que tous les coefficients matriciaux  $(R(f)\phi')_T(g)$  vont s'annuler pour  $g \in Q(\mathbb{A})$ . Mais alors  $R(f)\phi' = 0$ , parce que  $SO_{2n}(\mathbb{Q})Q(\mathbb{A})$  est dense dans  $SO_{2n}(\mathbb{A})$ <sup>1</sup>. Alors 1 implique 2. L'implication 2  $\Rightarrow$  3 est triviale. Supposons donc 3. Si  $T$  est une matrice dans  $\Lambda_n^2(\mathbb{Q})$  et telle que  $\phi_T \neq 0$ , on peut trouver  $\phi' \in Y$  telle que  $\phi'_T(1) \neq 0$ , où 1 est la matrice identité dans  $SO_{2n}(\mathbb{A})$ . Supposons que le rang de  $T > k$ . Alors  $T$  lorsque est considéré comme élément de  $\Lambda_n^2(\mathbb{Q}_p)$  aura le même rang, plus grand que  $k$ . Alors on peut trouver une fonction  $f \in C_c^\infty(N(\mathbb{Q}_p))$  telle que  $\widehat{f}(T) = 1$  mais  $\widehat{f} = 0$  sur la sous-variété de rang  $k$  de  $\Lambda_n^2(\mathbb{Q}_p)$ . Mais alors la formule (4.8) montre que  $R(f)\phi' \neq 0$ . Donc la représentation de  $SO_{2n}(\mathbb{Q}_p)$  sur  $Y$  est de rang plus grand que  $k$  et on a montré l'implication 3  $\Rightarrow$  1.  $\square$

*Démonstration du corollaire 4.2.2.* Si  $Ind_{SO_6 \times G_m N}^{SO_8}(\epsilon \otimes \mathbf{1} \otimes \chi)$  était une représentation cuspidale, le résultat principal dans l'article de Li ([Li89] main theorem page 44) garantit l'existence d'au moins une matrice  $a_0$  de rang maximal 4 pour laquelle le coefficient de Fourier correspondant  $\xi_{a_0}(g)$  est non nul. Mais ceci contredit la proposition 4.2.1 car toutes les formes qui apparaissent dans la décomposition doivent être dégénérées. Or le lemme 4.2.3 nous dit que si une représentation est dégénérée pour une place, alors il en est de même pour toutes les places. Par suite le paramètre global dont pour une place  $p$  la composante locale est la représentation  $Ind_{SO_6 \times G_m N}^{SO_8}(\epsilon \otimes \mathbf{1} \otimes \chi)$  est non cuspidal et donc doit être résiduel.  $\square$

**Remarque 4.2.4.** On va rappeler les paramètres possibles contenant un bloc  $sp_5$ . On a étudié dans ce chapitre le paramètre  $\psi = sp_5 \otimes \epsilon + r_3$  où  $r_3$  est une représentation orthogonale de degré 3. Dans ce cas la conjecture de Ramanujan n'est pas connue pour  $r_3$ . Donc la proposition 4.2.1 ne s'applique pas, le caractère induisant n'étant pas unitaire. En revanche, pour les paramètres du type  $\psi = sp_5 \otimes \epsilon + r_2 \oplus r_1$ , la représentation  $r_2$  est orthogonale de dimension 2 et dans ce cas la conjecture de Ramanujan est connue (c'est une représentation

<sup>1</sup>Rigoureusement, ce fait est faux, mais alors on fait le calcul sur le groupe simplement connexe  $Spin_{2n}$ , le revêtement double de  $SO_{2n}$ . La nullité des coefficients sur  $Spin_{2n}$  implique la nullité sur les coefficients de  $SO_{2n}$ .

induite à partir d'un *größencharacter*). Il en est de même pour le paramètre  $\psi = sp_5 \otimes \epsilon + r_1 \oplus r_1 \oplus r_1$

### 4.3 Extension au cas non unitaire

Les résultats principaux de la théorie de Mackey pour les représentations induites : théorèmes du sous-groupe, produit tensoriel et le nombre d'entrelacement [Lip74] concernent uniquement le cas où la représentation induite est unitaire. Rappelons que notre représentation  $Ind_{SO_6 \times G_m N}^{SO_8}(\epsilon \otimes \mathbf{1} \otimes \chi)$  est unitaire mais le caractère  $\chi$  en général n'est pas unitaire. On sait seulement d'après Jacquet, Shalika, Luo, Rudnick et Sarnak une approximation à la conjecture de Ramanujan ( $|\chi(p)| < p^{1/2 - \epsilon(n)}$ ). Néanmoins on va montrer le corollaire 4.2.2 même dans le cas où  $\chi$  n'est pas unitaire. Pour cela on va revenir à la théorie des représentations unitaires dans les espaces de Hilbert (on ne peut pas utiliser directement les arguments de Mackey). Nos références principales seront [Clo07] et [Dix69].

Dans cette section  $G$  dénotera un groupe de type I arbitraire (pour une définition précise voir [Dix69]) sur un corps local  $k$  où  $k$  peut être  $\mathbb{R}$  ou bien  $\mathbb{Q}_p$ . On utilisera la même notation pour le groupe  $G$  et pour le groupe de points rationnels  $G(k)$ . On va noter  $\widehat{G}$  l'ensemble de classes d'équivalence de représentations irréductibles de  $G$ . On peut procéder comme dans le cas de  $C^*$ -algèbres et on muni  $\widehat{G}$  d'une topologie naturelle et donc une structure borélienne de Mackey, ([Dix69] 3.8.1), et d'après la proposition 4.6.1 *cit. loc.* la structure borélienne de Mackey sur  $\widehat{G}$  est la structure sous-jacente à sa topologie, et fait de  $\widehat{G}$  un espace borélien standard.

Une fois que l'on a une structure borélienne sur  $\widehat{G}$ , on va considérer seulement des mesures relatives à cette structure.

Pour les représentations de groupes compacts on a une décomposition en somme hilbertienne de représentations irréductibles. En général, il n'en pas de même pour des groupes non compacts : on a une décomposition plus subtile (que Dixmier appelle "désintégration" ([Dix69] 8). Cette théorie peut être développée en complète généralité, on considère donc  $Z$  un espace borélien,  $\mu$  une mesure positive et  $x \rightarrow H(x)$  un champ  $\mu$ -mesurable d'espaces hilbertiens sur  $Z$ , c'est-à-dire, une couple  $\mathcal{F} = ((H(x))_{x \in Z}, \Gamma)$  où  $H(x)$  est une famille des espaces de Hilbert indexée par  $Z$  et  $\Gamma$  est un champ de vecteurs vérifiant les propriétés suivantes

1.  $\Gamma$  est un sous-espace vectoriel de  $\prod_{x \in Z} H(x)$ .
2. Il existe une suite  $\{y_k\}$  d'éléments de  $\Gamma$  tels que, pour tout  $x \in Z$ , les  $y_k(x)$  forment une suite totale dans  $H(x)$ .
3. Pour tout  $v \in \Gamma$  la fonction  $x \mapsto \|v(x)\|$  est mesurable.
4. Soit  $X$  un champ de vecteurs. Si pour tout  $v \in \Gamma$ , la fonction  $x \mapsto \langle y(x), v(x) \rangle$  est  $\mu$ -mesurable, alors  $y \in \Gamma$ .

Dans ces conditions, les éléments de  $\Gamma$  s'appellent les champs de vecteurs mesurables de  $\mathcal{F}$ . Si  $v_1 \in \Gamma$  et  $v_2 \in \Gamma$ , la fonction  $x \mapsto \langle v_1(x), v_2(x) \rangle$  est mesurable.

Supposons maintenant que pour tout  $x \in Z$ , on a  $\pi(x)$  une représentations de  $G$  dans  $H(x)$ . On dit que  $x \mapsto \pi(x)$  est un champ de représentations de  $G$ . On peut introduire la définition suivante.

**Définition 4.3.1.** Le champ de représentations  $x \mapsto \pi(x)$  est dit mesurable, si pour tout  $g \in G$ , le champ d'opérateurs  $x \mapsto \pi(x)(g)$  est mesurable, c'est-à-dire si  $\mathcal{F} = ((H(x))_{x \in Z}, \Gamma)$  est un champ mesurable d'espaces de Hilbert sur  $Z$  et pour tout  $x \in Z$ , soit  $T(x)$  un opérateur dans  $H(x)$ , on dit que  $x \mapsto T(x)$  est un champ mesurable d'opérateurs si, pour tout  $v \in \Gamma$ , le champ  $x \mapsto T(x)v(x)$  est mesurable.

Or on a  $\|\pi(x)(g)\| \leq \|g\|$  pour tout  $g \in G$  et tout  $x \in Z$ . Si le champ  $x \mapsto \pi(x)$  est mesurable, on peut former l'opérateur continu

$$\pi(g) = \int_Z \oplus \pi(x)(g) d\mu(x)$$

dans l'espace de Hilbert  $H = \int_Z \oplus H(x) d\mu(x)$ .

**Lemme 4.3.2.** L'application  $g \mapsto \pi(g)$  est une représentation de  $G$  dans  $H$ .

*Démonstration.* Voir [Dix69]. □

**Définition 4.3.3.** Avec les notations précédentes, on dit que  $\pi$  est l'intégrale hilbertienne des  $\pi(x)$  et l'on écrit  $\pi = \int_Z \oplus \pi(x) d\mu(x)$ .

Supposons que l'on a  $\pi \rightarrow m(\pi)$  une fonction de Borel de  $\hat{G}$  vers l'ensemble discret  $\{1, 2, \dots, \infty\}$ , l'application  $\pi \mapsto \oplus m(\pi) H_\pi$  est mesurable. Le résultat suivant est un énoncé classique que l'on peut trouver dans [Dix69] (voir aussi [Clo07] pour une formulation légèrement différente).

**Proposition 4.3.4.** Soit  $\rho$  une représentation de  $G$  dans un espace de Hilbert  $H$ .

1. Il existe une fonction de Borel  $\pi \mapsto m(\pi)$  de  $\hat{G}$  vers  $\{1, 2, \dots, \infty\}$  et une mesure positive  $\mu$  dans  $\hat{G}$  telle que

$$(\rho, H) = \int_{\hat{G}} \widehat{\oplus} m(\pi) H_\pi d\mu(\pi) \quad (4.9)$$

2. Cette expression est essentiellement unique. Cela veut dire que si  $\rho$  possède deux expressions (4.9), alors les mesures  $\mu$  et  $\mu'$  sont équivalentes et les fonctions  $m$  et  $m'$  sont égales presque par tout.

L'utilité de la formulation (4.9) est claire : la fonction de Borel  $m$  indique la multiplicité de la représentation  $\pi$  dans la décomposition intégrale.

La formulation dans Dixmier ([Dix69]) nous dit que

$$(\rho, H) = \widehat{\oplus}_{n=1}^{\infty} \int \widehat{\oplus} H_\pi d\mu_n(\pi) \quad (4.10)$$

où les mesures  $\mu_n$  sont mutuellement étrangères. Deux mesures mutuellement étrangères  $\mu$  et  $\mu'$  ont de support dans deux ensembles de Borel disjoints  $E$  et  $E'$ .

**Définition 4.3.5.** Pour  $\rho$  ayant une décomposition comme (4.9) ou bien (4.10), le support de la mesure  $\mu$ , qui est un sous-ensemble fermé de  $\hat{G}$  est appelé le *support* de  $\rho$  et on le dénote  $Supp(\rho)$ . Si  $\pi \in \hat{G}$  on dit que  $\pi$  est *contenue faiblement dans*  $\rho$  si  $\pi \in Supp(\rho)$ .

On considère désormais  $k$  un corps  $p$ -adique. Cette propriété peut être caractérisé à travers les coefficients de la représentation  $(\pi, H)$  : pour  $v \in H$ , soit  $\langle \pi(g)v, v \rangle = c_v(g)$  (voir [Clo07] thm 3.4 et [Dix69] thm 3.4.4).

**Proposition 4.3.6.** Soit  $G$  un groupe de type I,  $\rho$  une représentation unitaire de  $G$ , et  $\rho_1 \in \hat{G}$  (dual unitaire). Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1.  $\rho_1$  est contenue faiblement dans  $\rho$ .
2. Tout coefficient  $c_v$  de  $\rho_1$  est un limite uniforme sur tout sous-ensemble compact de  $G$  d'une suite  $\{f_m\}$  de combinaisons linéaires positives de coefficients de  $\rho$ .

Avec toutes ces résultats de théorie de représentations dans des espaces de Hilbert on peut énoncer le résultat principal de cette section.

**Théorème 4.3.7.** Soit  $N$  un groupe unipotent abélien et supposons que l'on a une suite croissante exhaustive  $\{N_l\}$  de sous-groupes compacts de  $N$ . Alors si un caractère  $\psi$  de  $N$  est contenu faiblement dans  $\rho$  pour tout  $l$  la restriction  $\psi|_{N_l}$  est contenue faiblement dans  $\rho$ . Réciproquement si pour tout  $l$  la restriction  $\psi|_{N_l}$  est contenue faiblement dans  $\rho$ , alors  $\psi$  est contenue faiblement dans  $\rho$ .

*Démonstration.* On peut supposer que  $\{N_l\}$  est la suite  $exp(\mathfrak{p}^{-l}\mathfrak{n}(\mathcal{O}))$ , où  $\mathcal{O}$  est l'anneau des entiers de  $k$ ,  $N \simeq (\mathbb{G}_a)^r$  est défini sur  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathfrak{n}(k) \simeq k^r$  est l'algèbre de Lie, et on pose  $\mathfrak{n}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}^r$ . On sait que  $\rho$  admet une décomposition comme (4.10), donc

$$H = \bigoplus_1^{\infty} L^2(\hat{N}, d\mu_n)$$

Si  $\psi \in Supp(\rho)$ , alors cette partie résulte immédiatement de la proposition 4.3.6 car si tout coefficient  $c_v$  de  $\rho$  est limite uniforme sur tout sous-ensemble compact de  $G$ , il l'est sur tout sous-ensemble compact  $N_l$ .

Réciproquement supposons que  $\psi|_{N_l} \in Supp(\rho)$  pour toute  $l$ .

On sait que  $N$  peut être canoniquement identifié à son algèbre de Lie,  $N \simeq \mathfrak{n}$ . En particulier, si on choisit une base de  $\mathfrak{n}$ , de sorte que  $\mathfrak{n}(\mathcal{O})$  est bien défini, on a  $\mathfrak{n}(\mathcal{O}) \simeq N(\mathcal{O})$ . Par suite, aussi leur groupes duaux sont isomorphes  $\hat{N} \simeq \mathfrak{n}^*$ . Cette remarque est importante car nous permet de considérer  $\psi$  comme un élément de  $\mathfrak{n}^*$ . Les groupes compacts forment une suite croissante et donc pour  $i > j$  on a  $N_j \subset N_i$ . De plus on a  $Supp(N_j) \subset Supp(N_i)$ . Ces groupes compacts peuvent être caractérisés comme

$$N_l = exp(\mathfrak{p}^{-l}\mathfrak{n}(\mathcal{O})) = exp(\mathfrak{p}^{-l}N(\mathcal{O})) \subset N$$

Si  $X \in \mathfrak{n}$ , alors  $exp(X) = x \in N$ . Supposons que l'on a fixé un caractère  $\theta$  additif de  $k$ , non trivial et de conducteur  $\mathcal{O}$ . Alors, avec ces notations on peut écrire  $\psi(x) = \theta(\lambda(X))$ .



On a vu que  $H$  se décompose comme

$$H = \int_{\widehat{N}} m(\psi)H(\psi)d\mu(\psi)$$

où les espaces  $H(\psi)$  son irréductibles invariants et isomorphes à  $\mathbb{C}$  car  $N$  est abélien. Si l'on considère  $\psi|_{N_l}$  on a

$$H|_{N_l} = \int_{\widehat{N}_l} m(\psi)H(\psi|_{N_l})d\mu(\psi)$$

Alors si  $\psi|_{N_k} \in \text{Supp}(\mu)$  alors il existe  $\phi \in \text{Supp}(\mu)$  tel que  $\phi = \psi + \lambda$  et  $\lambda|_{\mathfrak{p}^{-l}\mathfrak{n}(\mathcal{O})} \subset \mathcal{O}$  donc  $\lambda|_{\mathfrak{n}(\mathcal{O})} \subset \mathfrak{p}^l$ . Par suite  $\lambda \in \mathfrak{p}^l\mathfrak{n}(\mathcal{O})^*$ , où

$$\mathfrak{n}(\mathcal{O})^* = \{\lambda \in \mathfrak{n}^* \mid \langle \lambda, \mathfrak{n}(\mathcal{O}) \rangle \subset \mathcal{O}\}$$

La conclusion est que si  $\psi|_{N_l} \in \text{Supp}(\rho)$  pour toute  $l$ , alors  $\psi \in \text{Supp}(\rho) + \mathfrak{p}^l\mathfrak{n}(\mathcal{O})^*$ . Mais ceci est vrai pour toute  $k$ , donc  $\psi \in \text{Supp}(\rho)$  car  $\mathfrak{p}\mathfrak{n}(\mathcal{O})^*$  est une base de voisinages de 0 et  $\text{Supp}(\rho)$  est fermé.  $\square$

**Remarque 4.3.8.** En utilisant la théorie des orbites de Howe pour les représentations de groupes unipotents, on pourrait facilement leur étendre le théorème.

**Corollaire 4.3.9.** La représentation induite  $\text{Ind}_{SO_6 \times G_m N}^{SO_8}(1 \otimes \epsilon \otimes \chi)$  de la section précédent est singulière.

*Démonstration.* On considère uniquement le cas non tempéré. On a maintenant  $\text{Ind}_P^G(\epsilon \otimes ||^s)$  où  $s$  est un réel dans l'intervalle  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Cette représentation  $\text{Ind}_P^G(\epsilon \otimes ||^s)$  se réalise comme une induite compacte  $\text{Ind}_{K \cap P}^K(\epsilon \otimes 1|_{K \cap P})$ , où  $K$  est un sous-groupe compact maximal. Puisque les sous-groupes  $N_l$  sont compacts (et absorbés à conjugaison près pour tout voisinage de l'identité), ils se plongent à conjugaison près dans  $K$ . La restriction de  $\text{Ind}_P^G(\epsilon \otimes ||^s)$  à  $N_l$  ne dépend pas de  $s$ . Le corollaire résulte donc de 4.2.1  $\square$

## 4.4 Paramètres de $SO_{2n}$

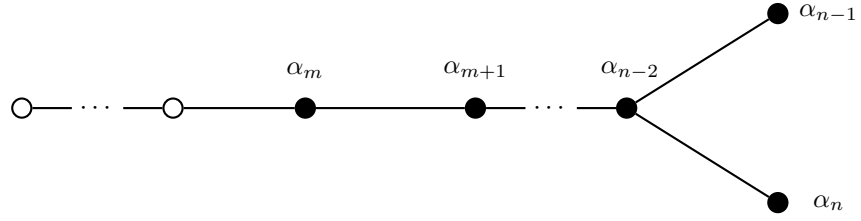
Le problème d'exclure tous les autres paramètres discrets ayant un bloc  $sp_k$ ,  $k \geq n+1$  est un problème combinatoire assez difficile. On va considérer pour d'abord le cas  $k = n+1$ , a savoir, la représentation

$$\text{Ind}_{SO_{n+2} \times \mathbb{G}_m^{n-1} N}^{SO_{2n}}(\epsilon \otimes \mathbf{1} \otimes \chi) \quad (4.11)$$

$\epsilon \otimes \mathbf{1}$  est un caractère non ramifié du groupe  $SO_{n+2}$  et  $\chi$  est un caractère du tore  $\mathbb{G}_m^{n-1}$ . Cette représentation provient du paramètre  $sp_{n+1} + \text{reste}$ . On suppose pour l'instant  $\chi$  unitaire, ce qui correspond au cas où le reste (voir 3.16) est formé de cuspidales vérifiant la conjecture de Ramanujan.

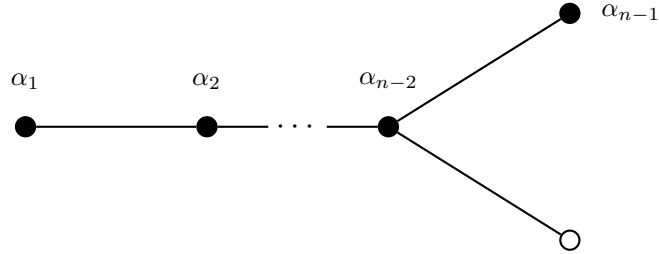
On est placé dans la situation suivante<sup>2</sup> :  $SO_{n+2}$  est un sous-groupe de Levi de  $SO_{2n}$  construit à partir des  $m+1$  racines signalées dans le diagramme

<sup>2</sup>On rappelle que  $n$  est pair et on pose  $m = \frac{n}{2}$



On note  $P$  le sous-groupe parabolique contenant  $SO_{n+1}$  construit à partir du diagramme.

De la même manière que dans le cas de  $SO_8$ , on va considérer  $Q$  le sous-groupe parabolique maximal de Siegel dont la composante de Levi est engendrée par les racines  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$  et isomorphe à  $GL_n$ .



Dans ce cas on pose encore  $\Theta$  et  $\Omega$  les sous-ensembles des racines simples qui engendrent la composante de Levi de  $Q$  et  $P$  respectivement. Maintenant les ensembles  $\Theta$  et  $\Omega$  sont

$$\begin{aligned}\Theta_Q = \Theta &= \{X_1 - X_2, X_2 - X_3, \dots, X_{n-1} - X_n\}, \\ \Omega_P = \Omega &= \{X_m - X_{m+1}, \dots, X_{n-1} - X_n, X_{n-1} + X_n\}\end{aligned}$$

Dans le cas général, les racines positives du diagramme du groupe  $SO_{2n}$  sont

$$\Sigma^+ = \begin{cases} X_i - X_j & 1 \leq i < j \leq n \\ X_i + X_j & 1 \leq i < j \leq n \end{cases}$$

Il nous sera également utile de calculer les ensembles  $\Sigma_{\Theta}^+$  et  $\Sigma_{\Omega}^+$ .

$$\Sigma_{\Theta}^+ = \{X_i - X_j \quad 1 \leq i < j \leq n\} \quad \Sigma_{\Omega}^+ = \begin{cases} X_i - X_j & m \leq i < j \leq n \\ X_i + X_j & m \leq i < j \leq n \end{cases}$$

Le sous-groupe unipotent  $N_Q$  est égal à  $\prod_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma_\Theta^+} N_\alpha$  où l'ensemble  $\Sigma^+ \setminus \Sigma_\Theta^+$  est donné par

$$\Sigma^+ \setminus \Sigma_\Theta^+ = \{X_i + X_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

Analoguement, le sous-groupe unipotent  $N_P$  est égal à  $\prod_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma_\Omega^+} N_\alpha$ , et l'ensemble  $\Sigma^+ \setminus \Sigma_\Omega^+$  est donné par

$$\Sigma^+ \setminus \Sigma_\Omega^+ = \begin{cases} X_i - X_j & i < j \text{ et } i \leq m-1 \\ X_i + X_j & i < j \text{ et } i \leq m-1 \end{cases}$$

Comme dans le cas de  $SO_8$ , on va calculer la restriction de (4.11) au sous-groupe unipotent  $N_Q$ , en appliquant la théorie de Mackey (cas unitaire). Pour cela, il nous faut calculer les doubles classes ou plutôt les doubles classes qui ont mesure positive. Bien sûr, dans ce cas général, on a peut avoir plus de deux doubles classes, mais le résultat de Bernstein et Zelevinsky est toujours vrai (voir [BZ76], 1.5), à savoir, on a une orbite fermée et une orbite ouverte. On va montrer que l'orbite ouverte est  $Qw_0P$  avec l'argument géométrique de la dimension : on va montrer que cette orbite a la même dimension que toute le groupe  $SO_{2n}$ .

Remarquons d'abord que dans la double classe  $Qw_0P$  on a des ambiguïtés car la écriture n'est pas unique.

Le calcul de dimension de la double classe  $Qw_0P$  nous donne

$$\begin{aligned} \dim Qw_0P &= \#\{\text{racines de } N_Q \text{ non redondantes}\} + \dim M_Q + \dim M_P \\ &\quad - \dim M_Q \cap M_P + \#\{\text{racines de } \overline{N}_P \text{ non redondantes}\} \end{aligned}$$

Or les racines de  $N_Q$  non redondantes sont les racines positives  $X_i + X_j$  où  $i \leq m-1$  : pour  $X_1$  il y en a  $n-1$ , pour  $X_2$  il y en a  $n-2$ , etc. jusqu'à la racine  $X_{m-1}$  où il y en a  $n-(m-1)$  racines. Par suite le nombre de racines non redondantes de  $N_Q$  est

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + (n-(m-1)) = (m-1)n - \sum_{k=1}^{m-1} k = (m-1)n - \frac{m(m-1)}{2} \quad (4.12)$$

Pour le cas de  $\overline{N}_P$ , les racines non redondantes sont les racines négatives  $-X_i - X_j$  telles que  $i \leq m-1$ . Pour  $X_1$  il y en a  $n-1$ , pour  $X_{m-1}$  où il y en a  $n-(m-1)$  racines. Donc on aura le même nombre de racines non redondantes que dans (4.12) :

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + (n-(m-1)) = (m-1)n - \frac{m(m-1)}{2}$$

Or  $\Theta$  engendre un sous-groupe isomorphe à  $GL_n$ ,  $\Omega$  engendre un sous-groupe isomorphe à  $SO_{n+1}$ . Donc la dimension de  $M_Q$  et  $M_P$  est  $n^2$  et  $\frac{(2m+2)(2m+1)}{2}$ , respectivement. L'intersection de  $M_Q$  et  $M_P$  est donné par les racines  $X_m -$

$X_{m+1}, \dots, X_{n-1} - X_n$  qui sont en total  $m$  et par suite l'intersection est isomorphe à  $GL_{m+1}$  dont la dimension est  $(m+1)^2$ .

Donc si on fait les comptes on a

$$\begin{aligned} \dim Qw_0P &= \\ &= 2 \left( (m-1)n - \frac{m(m-1)}{2} \right) + \underbrace{n^2}_{GL_n} + \underbrace{\frac{(2m+2)(2m+1)}{2}}_{SO_{2(m+1)}} - \underbrace{(m+1)^2}_{GL_{m+1}} \end{aligned}$$

Si on utilise le fait  $m = \frac{n}{2}$

$$\begin{aligned} \dim Qw_0P &= 2 \left( \frac{n^2}{2} - n - \frac{1}{2} \left( \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} \right) \right) + n^2 + \left( \frac{n}{2} + 1 \right) (n+1) - \left( \frac{n^2}{4} + n + 1 \right) \\ &= n^2 - 2n - \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} + n^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + n + 1 - \frac{n^2}{4} - n - 1 \\ &= 2n^2 - 2n + \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = 2n^2 - n \end{aligned}$$

D'autre côté la dimension du groupe  $SO_{2n}$  est  $\frac{(2n)(2n-1)}{2} = 2n^2 - n$ . En conséquence la double classe  $Qw_0P$  est ouverte. D'après le résultat de Bernstein et Zelevinsky  $Qw_0P$  est la seule orbite ouverte et donc est la seule à tenir en compte lors du calcul de la restriction de l'induite. Le calcul est en fait le même que dans le cas de  $SO_8$ . On part d'une induite

$$x \rightarrow \text{Ind}_{N_Q \cap xPx^{-1}}^{N_Q} (x \epsilon \otimes \chi)$$

qui donne après les calculs déjà indiqués la représentation induite

$$\text{Ind}_{N_Q \cap m_Q w_0 P w_0 m_Q^{-1}}^{N_Q} (y \epsilon \otimes \chi), \quad y = m_Q w_0 \quad (4.13)$$

Puisque  $m_Q$  normalise  $N_Q$  on a

$$m_Q^{-1} \text{Ind} \simeq \text{Ind}_{N_Q \cap w_0 P w_0}^{N_Q} (w_0 \epsilon \otimes \chi)$$

$M_Q$  opère naturellement sur  $N_Q = \Lambda^2(F^n)$  comme le groupe  $GL_n$  et  $\widehat{N_Q} = \Lambda^2(F^{n*})$ . Alors une forme  $f$  sur  $\Lambda^2(F^{n*})$  est dégénérée si et seulement si  ${}^m f$  est dégénérée. De même pour les caractères de groupes.

On est ramené donc à l'induite

$$\text{Ind}_{N_Q \cap w_0 P w_0}^{N_Q} (w_0 \epsilon \otimes \chi) \quad (4.14)$$

On doit calculer l'intersection

$$N_Q \cap w_0 P w_0 = N_Q \cap M_P \overline{N_P} = N_Q \cap M_P$$

Il est utile de calculer cette intersection en termes de racines, comme auparavant. Cette intersection est donnée par l'ensemble des racines que l'on appellera  $B$

$$B = \{X_i + X_j \quad m \leq i < j \leq n\} \quad (4.15)$$

Soit  $N_B = \prod_{\alpha \in B} N_\alpha$ . Or  $\epsilon$  est un caractère de  $M_P = SO_{n+1} \times \mathbb{G}_m^{n-1}$ , trivial sur le sous-groupe dérivé  $SO_{n+1}^+$  et donc trivial sur le sous-groupe unipotent  $N_Q$ . Alors la restriction de l'induite devient

$$Ind_{N_B}^{N_Q}(1) = m_1 L^2(N_Q/N_B) \quad (4.16)$$

où  $m_1$  est la multiplicité de  $1$ . Alors les composantes continues de (4.16) sont les caractères de  $N_Q$  triviaux sur  $N_B$ , que l'on va considérer comme de formes linéaires de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{n}_Q$  triviales sur  $\mathfrak{n}_B$ .

## 4.5 Singularité de ces paramètres, cas $SO_{2n}$

D'après la méthode exposée dans la première partie de ce chapitre, on a le résultat analogue de 4.2.1

**Proposition 4.5.1.** *Soit  $\rho = Ind_{SO_{n+1} \times \mathbb{G}_m^{n-1} N}^{SO_{2n}}(\epsilon \otimes \mathbf{1} \otimes \chi)$ . Soit  $\psi$  un caractère additive fixe non trivial de  $\mathbb{Q}_p$ . Soit  $\xi$  un caractère de  $N_Q(\mathbb{Q}_p)$  apparaissant dans la décomposition spectrale de  $\rho|_{N_Q}$ . On peut écrire  $\xi(x) = \psi((X, \lambda))$ , où  $x \in N_Q$ ,  $x = \exp(X)$ ,  $X \in \mathfrak{n}_Q$  (l'algèbre de Lie de  $N_Q$ ), et  $\lambda \in \mathfrak{n}_Q^* \simeq \Lambda^2(V^*)$  (l'espace de formes alternées sur  $V$ ). Alors  $\lambda$  est dégénérée (et en conséquence aussi  $\xi$ ).*

*Démonstration.* L'espace totalement isotrope  $V$  se construit à partir d'une base canonique  $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ . Si  $\xi$  intervient dans la décomposition spectrale,  $\lambda$  est un élément de  $\widehat{\mathfrak{n}}_Q$  trivial sur  $\mathfrak{n}_B$ . D'après la forme des racines dans l'ensemble  $B$  défini dans (4.15),  $\mathfrak{n}_B$  est engendré par

$$\mathfrak{n}_B = \langle e_m \wedge e_{m+1} \dots, e_m \wedge e_n, e_{m+1} \wedge e_{m+2}, \dots, e_{n-1} \wedge e_n \rangle$$

et donc  $\lambda$  est trivial sur  $e_i \wedge e_j$ , avec  $m \leq i < j \leq n$ . La forme linéaire  $\lambda$  s'écrit dans la base duale de  $\Lambda^2(V)$  comme une matrice alternée de la forme

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ -\lambda_{12} & 0 & \cdots & \lambda_{2n} \\ & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \boxed{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}} \\ -\lambda_{1n} & -\lambda_{2n} & \cdots & \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Or la matrice  $\lambda$  a un sous-bloc de taille  $(m+1) \times (m+1)$  dont tous les éléments sont zéros. Le déterminant de cette matrice vaut zéro à cause du lemme suivant d'algèbre linéaire.

**Lemme 4.5.2.** Soit  $m$  un entier tel que  $m \geq 2$ . Soit  $k$  un corps et soit  $\mathcal{A}$  une matrice carrée de  $2m \times 2m$  qui possède une sous-matrice de  $(m+1) \times (m+1)$  dont tous les éléments sont zéros. Alors  $\det \mathcal{A} = 0$ .

*Démonstration.* Supposons par exemple  $\mathcal{A}$  du type (4.17). Alors pour  $i = m, \dots, 2m$ , le produit  $\mathcal{A}e_i \in \langle e_1, \dots, e_{m-1} \rangle$ . Donc l'application associée ne peut pas être inversible. □

Ceci achève le résultat. □

On a bien sûr, l'analogie du corollaire 4.2.2

**Corollaire 4.5.3.** Une représentation globale ayant comme facteur local à la place  $p$  la représentation locale  $Ind_{SO_{n+2} \times \mathbb{G}_m^{m-1} N}^{SO_{2n}}(\epsilon \otimes \mathbf{1} \otimes \chi)$  est résiduelle.

Remarquer que le corollaire reste vrai même si le caractère  $\chi$  n'est pas unitaire, grâce au théorème 4.3.7.

### 4.5.1 Paramètres plus excentriques

Considérons d'abord le paramètre  $\psi = sp_{n+1} + \sum_{i=1}^{m-1} \chi_i$  avec  $\chi_i$  des caractères de  $\mathbb{G}_m = \mathbb{Q}^\times$ . La condition  $\det = 1$  et l'autodualité impliquent que l'un des caractères doit être trivial. Alors dans  $\psi$  "apparaît"  $sp_{n+1} + 1$  qui donne la représentation trivial de  $SO_{n+2}$  et on se ramène au cas connu du paramètre

$$Ind_{SO_{n+2} \times \mathbb{G}_m^{m-1} N}^{SO_{2n}}(\epsilon \otimes \mathbf{1}) \otimes \chi$$

qui est singulier.

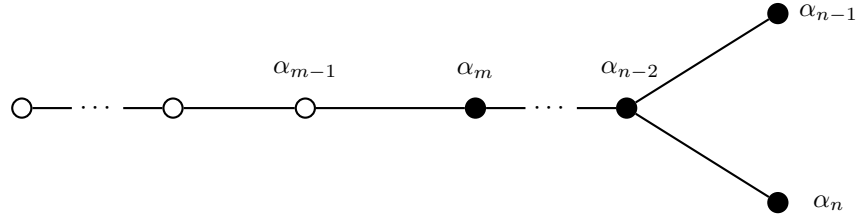
Désormais on va considérer des paramètres qui ont de valeurs propres plus grandes que celles étudiées auparavant. On remarque que pour décrire explicitement un paramètre d'Arthur il suffit de déterminer sa matrice de Hecke (places non ramifiées, à conjugaison près). Ce sont des paramètres

$$\psi = \epsilon \otimes sp_k \oplus \sum r_i \otimes sp_i \tag{4.18}$$

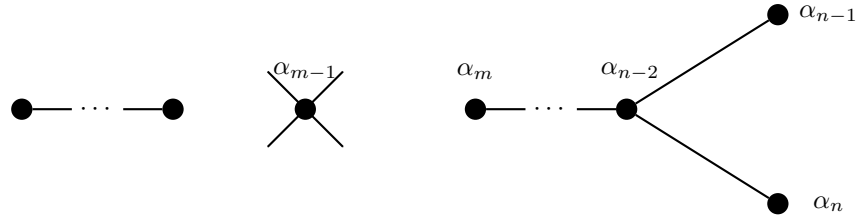
qui possèdent de blocs  $sp_k$  avec  $k > n + 1$ , plus un reste  $R$ , où *a priori* on peut trouver de blocs  $sp_i$  plus petits. Le reste doit satisfaire aussi des conditions d'autodualité et doit être une représentation orthogonale.

Au lieu de considérer pour chaque paramètre la restriction au sous-groupe unipotent  $N_Q$ , on va donner un argument qui nous permet de considérer tout ces paramètres comme sous-représentations (ou quotients) de représentations singuliers dans le sens de Howe.





Notre but est réaliser la représentation  $sp_{n+3}$  comme une sous-représentation singulière où  $sp_{n+1}$  intervient. Plus précisément cette représentation est construite à partir du diagramme suivant.



Cela veut dire que l'on va considérer à  $sp_{n+3}$ <sup>3</sup> comme une induite de à partir de  $sp_{n+1}$  et  $\chi$  un caractère. Plus précisément

$$sp_{n+3} \hookrightarrow \text{Ind}_{\mathbb{G}_m SO_{n+2}N}^{SO_{2n}}(\chi, sp_{n+1})$$

ce qui nous permet de considérer toute la représentation

$$sp_{n+3} \oplus \sum sp_i \otimes r_i \hookrightarrow \text{Ind}_{GL_r \mathbb{G}_m SO_{n+2}N}^{SO_{2n}}(\chi, sp_{n+1}) \otimes \xi$$

où  $\xi$  est un caractère du tore de  $GL_r$  et  $\chi$  est un caractère de  $\mathbb{G}_m$ . Puisque l'on a la condition initiale que  $sp_{n+1}$  est singulière, alors le paramètre  $\psi' = sp_{n+3} \oplus \sum sp_i \otimes r_i$  sera singulier. Alors on répète par récurrence cet argument pour  $k > n + 1$  et impair. On considère maintenant le paramètre (4.18), à savoir  $\psi = \epsilon \otimes sp_k \oplus \sum r_i \otimes sp_i$ . Ce paramètre est réalisé comme une sous-représentation de  $\text{Ind}_{\mathbb{G}_m SO_{k-1}N}^{SO_{2n}}(\chi, sp_{k-2})$  où  $sp_{k-2}$  est singulière par hypothèse de récurrence et donc  $\psi$  est singulier. Avec cette discussion on a démontré le théorème suivant.

<sup>3</sup>Remarquons en général que  $sp_{n+3}$  (et  $sp_k$  en général) peut apparaître tordu par un caractère  $\epsilon$  d'ordre 2 qui n'intervient guère dans les calculs. On l'omet pour simplifier la notation.



**Théorème 4.5.4.** Soit  $\psi$  un paramètre discret du groupe déployé  $SO_{2n}$  ayant la forme particulière

$$\psi = sp_k \oplus \sum r_i \otimes sp_i$$

avec  $k$  impair et  $k > n + 1$ . Alors  $\psi$  est globalement singulier dans le sens de Howe. Précisément, les représentations de  $SO_{2n}(\mathbb{Q}_v)$  associées, aux places non ramifiées, au paramètre  $\psi$  sont singulières et ne peuvent pas donc apparaître dans l'espace des formes paraboliques.

Notons que la conclusion du théorème est *inconditionnel*. Ce qui dépend de la description d'Arthur est le fait que toute représentation du spectre discret soit associée à un paramètre  $\psi$  (discret).





**Proposition 5.1.1** (Duke, Howe, Li). *Soit  $f$  une forme cuspidale de Siegel de poids  $k$ . Supposons qu'elle est propre pour l'opérateur de Hecke  $T_p$ , avec valeur propre  $\lambda_p$ .*

1. Pour  $n > 1$ , on a

$$|\lambda_p| \leq 2^n p^{\frac{nk}{2} - \frac{n(n+1)}{12}}$$

2. Si  $n = 2^r$ ,  $r \geq 1$ , on a

$$|\lambda_p| \leq 2^n p^{\frac{nk}{2} - \frac{n(n+1)}{8}}$$

3. Pour  $n = 2$  on a

$$|\lambda_p| \leq 4p^{k-1}$$

*Démonstration.* Voir le corollaire 5.3 et le corollaire 5.5 dans [DHL92].  $\square$

## 5.2 Estimées pour $SO_{2n}$

Rappelons encore que pour le cas des représentations cuspidales  $GL_n$ , nous avons des approximations à la conjecture de Ramanujan.

1.  $|t^{\pm 1}| < p^{\frac{1}{2}}$  due à Jacquet et Shalika.

2.  $|t^{\pm 1}| < p^{\frac{1}{2} - \frac{1}{n^2+1}}$  due à Luo, Rudnick et Sarnak.

Le but dans ce chapitre est de donner des estimées précises pour des représentations cuspidales pour le cas de  $SO_8$  et des estimées peut être moins raffinées pour le cas de  $SO_{2n}$ .

On va rappeler certains faits du groupe déployé  $SO_{2n}$  sur  $\mathbb{Q}$ . On a des groupes compacts maximaux naturels, à savoir  $SO_{2n}(\mathbb{Z}_p) = K_p$  pour les places finies, on pose  $K_f = \prod_p K_p$ . On fixe un sous-groupe compact maximal  $K_\infty$  de  $SO_{2n}(\mathbb{R})$ . On pose finalement le sous-groupe compact  $K = K_\infty \times K_f \subset SO_{2n}(\mathbb{A})$ .

**Définition 5.2.1.** On définit  $H_p = H(SO_{2n}(\mathbb{Q}_p), K_p)$  l'algèbre des fonctions sur  $SO_{2n}(\mathbb{Q}_p)$  bi-invariantes sous  $K_p$  et à support compact. Toute fonction  $f$  dans  $H_p$  est constante dans les doubles classes  $K_p x K_p$ . Puisque  $f$  est aussi à support compact, c'est une combinaison linéaire finie des fonctions caractéristiques  $ch_{K_p x K_p}$  des doubles classes. Donc ces fonctions caractéristiques donnent une  $\mathbb{Z}$ -base pour  $H_p$ . On appellera cette algèbre *l'algèbre locale de Hecke*. On pose

$$H_f(SO_{2n}, K_f) = \bigotimes_p H(SO_{2n}(\mathbb{Q}_p), K_p)$$

On a une action par convolution de  $H_f(SO_{2n}, K_f)$  sur l'espace des fonctions sur  $SO_{2n}(\mathbb{Q}) \backslash SO_{2n}(\mathbb{A}) / K_f$ .

On va décrire l'action des opérateurs de Hecke sur les vecteurs  $K_f$ -invariants d'une représentation intervenant dans la décomposition spectrale de  $SO_{2n}$ . Si on considère une telle représentation  $\pi$ , elle se décompose comme un produit tensoriel  $\pi = \otimes_p \pi_p$ . Pour presque tout  $p$  la composante  $\pi_p$  en  $p$  est une représentation non ramifiée de  $SO_{2n}(\mathbb{Q}_p)$ . Dans ce cas, on sait que  $\pi_p$  est une

représentation induite à partir d'un caractère non ramifié  $\chi$  du tore maximal  $T_0(\mathbb{Q}_p)$ .

On rappelle que le groupe de Weyl peut être décrit comme le quotient  $W = N(T_0)/T_0$  où  $N(T_0)$  est le normalisateur de  $T_0$ . Alors le caractère  $\chi$  n'est défini qu'à l'action de  $W$  près. On note comme avant  $X^*(T_0)$  le groupe de caractères rationnels de  $T_0$  et  $X_*(T_0)$  celui des cocaractères. On rappelle que dans notre cas le groupe dual de Langlands  ${}^L SO_{2n}$  est  $SO_{2n}(\mathbb{C}) \times \Gamma_{\mathbb{Q}}$ , où  $\Gamma_{\mathbb{Q}}$  est le groupe de Galois de  $\mathbb{Q}$ . On fixe un tore maximal  $\widehat{T}_0$  de  $SO_{2n}(\mathbb{C})$  et on a un isomorphisme

$$X^*(\widehat{T}_0) \simeq X_*(T_0)$$

On note  $t_1, \dots, t_n$  une base de  $X^*(\widehat{T}_0)$ . Or la transformée de Satake induit un isomorphisme entre l'algèbre de Hecke locale  $H_p = H(SO_{2n}(\mathbb{Q}_p), K_p) \otimes \mathbb{C}$  et l'algèbre de polynômes  $\mathbb{C}[X^*(\widehat{T}_0)]^W = \mathbb{C}[t_i^{\epsilon_i}]$  qui sont invariants par le groupe de Weyl ( $\epsilon_i = \pm 1$ ). Pour une fonction  $f \in H_p = H(SO_{2n}(\mathbb{Q}_p), K_p)$  on note la transformée de Satake par  $Sf$ .

Pour le calcul de la transformée de Satake on aura besoin des poids minuscules. Soit  $\Sigma^+$  l'ensemble des racines positives de  $SO_{2n}(\mathbb{Q}_p)$  et  $\rho$  la demi somme des racines positives. Soit  $P^+$  la chambre de Weyl positive :

$$P^+ = \{\lambda \in X_*(T_0) \mid \langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0 \text{ pour toute } \alpha \in \Sigma^+\}$$

Ce qui donne une décomposition de  $SO_{2n}(\mathbb{Q}_p)$

$$SO_{2n}(\mathbb{Q}_p) = \bigcup_{\lambda \in P^+} K_p \lambda(p) K_p$$

Les fonctions caractéristiques  $ch_\lambda$  des doubles classes  $K_p \lambda(p) K_p$  forment une base de  $H(SO_{2n}(\mathbb{Q}_p), K_p)$ . D'ailleurs les éléments  $\lambda \in P^+$ , que l'on peut considérer aussi comme éléments de  $X^*(\widehat{T}_0)$  paramètrent les représentations irréductibles de dimension finie  $V_\lambda$  de  ${}^L SO_{2n}$ , avec  $\lambda$  le plus haut poids de  $V_\lambda$ . Pour  $\lambda$  une poids minuscule de  ${}^L SO_{2n}$ , la transformée de Satake de  $ch_\lambda$  prend la forme

$$Sch_\lambda = p^{\langle \lambda, \rho \rangle} Tr(V_\lambda) \quad (5.1)$$

ce qui est un résultat standard dans la théorie de variétés de Shimura ([Kot84] théorème 2.1.3). Ces transformées de Satake ont été calculées explicitement par [DHL92] et par [C-U04].

Considérons donc le cas de  $SO_{2n}$ . On rappelle que le tore dual  $\widehat{T}_0$  a la forme

$$\widehat{T}_0 = \left\{ \left( \begin{pmatrix} t_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & t_n & & \\ & & & t_n^{-1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & t_1^{-1} \end{pmatrix} \mid t_i \in \mathbb{C}^\times \right) \right\}$$



où l'exposant  $a$  est calculé comme

$$a = \frac{1}{2} \left( \sum_{i < j} X_i - X_j + \sum_{i < j} X_i + X_j \right)$$

évalué dans le vecteur  $(1, 0, \dots, 0)$ . Ce qui donne  $a = n - 1$ . En particulier :

**Lemme 5.2.2.** *Le degré de la fonction caractéristique  $f_p$  de la double classe (5.4) est donné par*

$$Sf_p = \widehat{T}(\text{triv}) = p^{n-1} \left( \sum_{i=0}^{n-1} (p^i + p^{-i}) \right) \quad (5.5)$$

Remarquons que d'après l'argument de singularité donné dans le chapitre 4, les représentations cuspidales ne peuvent pas avoir de blocs  $sp_k$  pour  $k \geq n$  dans le cas de  $SO_{2n}$  et  $k \geq 4$  pour le cas de  $SO_8$ . Si les conjectures d'Arthur sont vraies, les représentations apparaissant dans la décomposition spectrale de  $SO_{2n}$  correspondent aux paramètres discrets d'Arthur (description faite dans le chapitre 3). Parmi ces paramètres on peut éliminer les paramètres singuliers (paramètres possédant blocs  $sp_k$  pour  $k \geq n$ ) grâce au théorème 4.5.4 du chapitre 4. En conséquence, les paramètres présents dans le spectre résiduel possèdent des blocs  $sp_k$  avec  $k < n$ . Lorsque l'on considère les matrices de Hecke des ces paramètres cuspidaux on obtient :

**Théorème 5.2.3.** *Soit  $\pi$  une représentation unitaire de  $SO_8(\mathbb{A})$ , intervenant dans la partie cuspidale de la décomposition spectrale de  $\mathcal{L}^2(SO_8(\mathbb{Q}) \backslash SO_8(\mathbb{A}))$ , et non ramifié dans  $p$ . On suppose vraies les conjectures d'Arthur. Alors si on a*

$$\pi(f_p)e_p = \lambda_p e_p$$

où  $e_p$  est le vecteur non ramifié de  $\pi_p$ , alors on a l'estimée

$$|\lambda_p| \leq p^3(p^{3/2} + \dots + p^{-3/2})(\tau + \tau^{-1}) \quad (5.6)$$

où  $(t, t^{-1})$  est la matrice de Hecke d'une représentation cuspidale de  $GL_2$  non ramifiée en  $p$ , et  $\tau = |t|$  et d'après Kim et Sarnak on a

$$|\tau| \leq p^{\frac{7}{64}}$$

On a bien entendu, le théorème correspondant pour le cas de  $SO_{2n}$ .

**Théorème 5.2.4.** *Soit  $\pi$  une représentation unitaire de  $SO_{2n}(\mathbb{A})$ , intervenant dans la partie cuspidale de la décomposition spectrale de  $\mathcal{L}^2(SO_{2n}(\mathbb{Q}) \backslash SO_{2n}(\mathbb{A}))$ , et non ramifié dans  $p$ . On suppose vraies les conjectures d'Arthur. Alors si on a*

$$\pi(f_p)e_p = \lambda_p e_p$$

où  $e_p$  est le vecteur non ramifié de  $\pi_p$ , alors on a l'estimée

$$|\lambda_p| = O \left( p^{n-1 + \frac{n-1}{2} + \epsilon(n)} \right) \quad (5.7)$$

où  $\epsilon(n) = \frac{1}{n^2+1}$  avec les estimées connus dus à Luo, Rudnick et Sarnak. Sous la hypothèse de Ramanujan on a l'estimée

$$|\lambda_p| = O\left(p^{n-1+\frac{n-2}{2}}\right) \quad (5.8)$$

Dans les chapitres suivants, nous allons montrer à l'aide de la construction des représentations résiduelles des chapitres 1 et 2 que l'estimée *limite* de ces théorèmes peut en fait être améliorée pour les formes paraboliques.



---

# Résultats locaux

Dans ce chapitre on fait les calculs locaux des caractères (tordu et non tordu) qui nous permettront de comparer la multiplicité de la représentation résiduelle construite au chapitre 2 avec celle prédite par Arthur dans [Art05].

## 6.1 Comparaison des caractères

Notre but dans cette section est de comparer la formule des traces pour le groupe  $GL_{2n}$  et la forme déployée du groupe orthogonal  $SO_{2n}$ , qui est un sous-groupe endoscopique maximal de  $GL_{2n} \times \theta$ , la composante connexe non neutre du groupe non connexe  $GL_{2n} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  ( $\tilde{G}^+$  dans la notation d'Arthur), défini dans [Art05] §30 page 234. Pour simplifier la notation, dans tout ce chapitre  $F$  est un corps local, archimédien ou  $p$ -adique (complétion de  $\mathbb{Q}$ ).

### 6.1.1 Calcul des caractères

Pour les calculs et avec la finalité d'alléger la notation, on fixera une fois pour toutes, la notation  $\mathbf{G}_{2n}$  pour  $GL_{2n}$  et  $\mathbf{G}$  pour  $SO_{2n}$ , le groupe orthogonal défini par la matrice  $J_0^*$ <sup>1</sup>, où

$$J_0^* = \begin{pmatrix} & 1_n \\ 1_n & \end{pmatrix}$$

---

<sup>1</sup>Ce groupe orthogonal est clairement quasi-déployé et est naturellement isomorphe au groupe orthogonal défini par la matrice  $J$  définie auparavant, via des changements de variables évidents

Dans le cas du groupe  $\mathbf{G}$  on considère le sous-groupe de Levi  $\mathbf{M}_{\mathbf{G}} = GL_n$  qui est plongé dans  $\mathbf{G}$  de la façon naturelle

$$g \in GL_n \mapsto \begin{pmatrix} g & \\ & {}_t g^{-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{G}$$

La représentation  $\pi$  à considérer pour le calcul du caractère  $\Theta_{\pi}(g)$  est le paramètre que l'on étudié auparavant. La représentation  $\pi$  est l'induite

$$Ind_{GL_n N}^{\mathbf{G}}(|det|^s) = \pi \quad (6.1)$$

avec  $N$  le sous-groupe unipotent du parabolique contenant  $\mathbf{M}_{\mathbf{G}}$  et  $s$  un nombre complexe.

Or du côté  $\mathbf{G}_{2n}$  la représentation à analyser est

$$Ind_{GL_n \times GL_n N_{2n}}^{\mathbf{G}_{2n}}(|det(m_1)|^s |det(m_2)|^{-s}) = \Pi \quad (6.2)$$

où  $N_{2n}$  est le sous-groupe unipotent correspondant.

**Remarque 6.1.1.** D'après [Clo84] le caractère  $\Theta_{\pi}(g) = 0$ , sauf si  $g$  est un élément qui est conjugué à un élément de  $\mathbf{M}_{\mathbf{G}}$ . On remarque aussi que pour calculer  $\Theta_{\pi}(g)$  il suffit de le connaître presque partout (sauf un ensemble de mesure nulle) et donc il suffit de calculer le caractère dans les éléments réguliers que l'on notera  $\mathbf{G}'$ . On note  $(\mathbf{M}_{\mathbf{G}}^{\mathbf{G}})'$  les éléments réguliers qui sont conjugués à un élément de  $\mathbf{G}$ .

Soit  $T_0$  le tore maximal du centre de  $\mathbf{M}_{\mathbf{G}}$ , alors  $T_0$  est la composante déployée de  $M$ , notée  $A = A_M$ . Donc  $A_M = T_0$  est de la forme

$$T_0 = \begin{pmatrix} t & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & t & & \\ & & & t^{-1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & t^{-1} \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, si  $S$  est un tore maximal de  $\mathbf{M}_{\mathbf{G}} = GL_n$ , on sait que l'on peut lui associer une partition de  $n = n_1 + \dots + n_r$ , où chaque  $n_i$  correspond à une extension de degré  $n_i$  d'un corps  $K_{n_i}/F$ . Par conséquent on a  $K_{n_i}^{\times} \subset GL_{n_i}(F)$  et

$$S = K_{n_1}^{\times} \times \dots \times K_{n_r}^{\times}$$

Pour le calcul du caractère on va suivre l'article de van Dijk [vDj72]. D'après la formulation de van Dijk (page 237) le caractère de  $\pi$  dans un élément  $\gamma$  se calcule comme

$$\Theta_{\pi}(\gamma) = \sum_{j \in W(A, A_S)} \theta_{j\rho}(\gamma) \frac{|D_M^j(\gamma)|^{\frac{1}{2}}}{|D_G(\gamma)|^{\frac{1}{2}}} \quad (6.3)$$

où  $W(A, A_S)$  est l'ensemble des plongements  $j : A \rightarrow A_S$  qui sont  $\mathbf{G}$ -réalisés, c'est-à-dire qui proviennent d'un automorphisme intérieur. L'ensemble  $W(A, A_S)$  est un objet difficile à décrire explicitement. Le terme  $D_G(\gamma)$  est défini de la manière suivante ([vDj72], page 235). Soit  $t$  une indéterminée et  $l$  le rang du  $G$ . Alors  $D(x)_G = D(x)$

$$\det(t + 1 - \text{Ad}(x)) = D(x)t^l + \text{termes de plus haut degré} \quad (6.4)$$

On sait que l'ensemble des éléments réguliers satisfait

$$D(x) \neq 0, \quad x \in G$$

Cependant, cette définition n'est guère utile pour calculer ces termes. Il est plus facile de les calculer à l'aide des racines. On a

$$\det(t - (\text{Ad}(x) - 1)) = t^l \prod_{\alpha} (t - (x^{\alpha} - 1))$$

où le produit porte sur toutes les racines  $\alpha$  de  $G$ . Par suite on a

$$D_G(x) = \prod_{\alpha} (x^{\alpha} - 1) = \det(\text{Ad}(x) - 1)|_{\mathfrak{g}/\mathfrak{t}}$$

On note  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{t}$  les algèbres de Lie de  $G$  et  $T$  respectivement. Si on réalise ce même calcul pour le sous-groupe de Levi  $M$ , on obtient

$$D_M(x) = \det(\text{Ad}(x) - 1)|_{\mathfrak{m}/\mathfrak{t}}$$

Donc

$$D_{G/M}(x) = \det(\text{Ad}(x) - 1)|_{\mathfrak{m}/\mathfrak{t}} = \prod_{\substack{\alpha > 0, \\ \alpha \notin M}} (x^{\alpha} - 1) \prod_{\substack{\alpha < 0, \\ \alpha \notin M}} (x^{\alpha} - 1) = \prod_{\substack{\alpha > 0, \\ \alpha \notin M}} (x^{\alpha} - 1)(x^{-\alpha} - 1)$$

Ce terme est stablement invariant, car il est algébrique, donc on peut le calculer pour un élément  $x \in T(\overline{F}) = \{x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}\}$ .

De même on peut faire le calcul dans le cas tordu

$$D_{G_{L_{2n}/M_{2n}}}^{\theta}(x) = \det(\text{Ad}(x) - \theta)|_{\tilde{\mathfrak{g}}/\tilde{\mathfrak{m}}} \quad (6.5)$$

Or le quotient  $\tilde{\mathfrak{g}}/\tilde{\mathfrak{m}}$  consiste de matrices de la forme

$$\left( \begin{array}{c|c} & * \\ \hline & \\ \hline * & \end{array} \right)$$

Or l'automorphisme extérieur  $\theta$  agit par  $X \mapsto J(-{}^t X)J$ . Donc la matrice  $E_{ij}$  (1 dans la place  $ij$  et 0 ailleurs) est envoyée à la matrice  $-E_{ji}$ . Donc pour un

élément

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & x_n & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Si on analyse le terme  $Ad(x) - \theta$ , pour  $i \neq j$ , on a dans le sous-espace  $\langle E_{ij}, E_{ji} \rangle$

$$Ad(x) - \theta = \begin{pmatrix} x_i & -1 \\ -1 & x_j \end{pmatrix}$$

donc  $\det_{ij}(Ad(x) - \theta) = x_i x_j - 1$ . Dans le cas  $i = j$  nous avons  $\det_{ii}(Ad(x) - \theta) = x_i + 1$ . Par conséquent on a

$$D_{GL_{2n}/GL_n \times GL_n}^\theta = \prod_{i \neq j} (x_i x_j - 1) (x_i^{-1} x_j^{-1} - 1) \prod_{i=j} (x_i + 1) (x_i^{-1} + 1) \quad (6.6)$$

Dans le cas où  $S$  est un tore elliptique (c'est-à-dire qu'il y a un seul corps  $K_n$ ), il s'avère que

$$W(A, A_S) = \begin{cases} (x, x^{-1}) \rightarrow (x, x^{-1}) \\ (x, x^{-1}) \rightarrow (x^{-1}, x) \end{cases}$$

Néanmoins, il n'est pas nécessaire d'avoir une description exacte de cet ensemble pour tous les tores possibles  $S \subset \mathbf{M}_{\mathbf{G}}$ . Il est nécessaire plutôt de comprendre comment cet ensemble se relie avec celui du côté tordu. Tout ce problème nous ramène à savoir comment associer à un tore  $S \subset \mathbf{M}_{\mathbf{G}}$  un autre tore  $T$  (ou  $\theta$ -tore) contenu dans  $\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}} = GL_n \times GL_n$ . Ce problème est en fait très lié à la construction de la norme pour les éléments de  $\mathbf{G}$ . En général, on a la description abstraite de la norme due à Kotwittz-Shelstad [K-S99] et certains cas qui ont été décrits par Waldspurger [Wal07].

Dans la section 6.2.1 nous allons rappeler (dans notre cas) la construction de la "norme" associant classes de conjugaison (stables) dans  $\mathbf{G}$  et classes de conjugaison tordues (stables) dans  $\mathbf{G}_{2n}$ . Dans notre situation, pour les deux groupes, la conjugaison et la conjugaison stable (et stable tordue pour le cas de  $\mathbf{G}_{2n}$ ) coïncident pour les éléments fortement réguliers de  $\mathbf{M}_{\mathbf{G}}$  et de  $\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}}$ , on verra que l'on peut prendre pour représentants (dans  $\mathbf{G}_{2n}$ ) un  $\theta$ -tore. On considère le tore  $S$ , la norme  $\mathcal{A}$  d'un élément de  $S$  est alors décrite par le  $\theta$ -tore contenu dans  $\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}} = GL_n \times GL_n$  :

$$T = \{(x, 1) \mid x \in S\} = S \times 1$$

Le pas suivant est calculer le centralisateur tordu  $T'$  de ce tore  $T \subset \mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}}$ . Considérons  $m = (m_1, m_2) \in \mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}}$  dans le  $\theta$ -centralisateur de  $T$ . On utilisera souvent la notation  $m^\theta = \theta(m)$ . On a

$$\theta(m)tm^{-1} = m^\theta tm^{-1} = ({}^t m_2^{-1}, {}^t m_1^{-1})(x, 1)(m_1^{-1}, m_2^{-1}) = t = (x, 1)$$

Ce qui entraîne

$$\begin{cases} {}^t m_1^{-1} = m_2 \\ m_1 x m_1^{-1} = x \end{cases}$$

On en déduit que  $m_1 \in S$ , puis qu'il commute à  $x$ . Alors  $T'$  est

$$\{(t, {}^t t^{-1}) \mid t \in S\}.$$

Puisque  $T'$  est de dimension  $n$ , on en déduit que c'est le  $\theta$ -centralisateur dans  $\mathbf{G}_{2n}$ . Une fois calculé le centralisateur tordu  $T'$ , on va décrire sans l'expliciter l'ensemble des plongements  $\tilde{j} : A_{\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}}}^\theta \rightarrow A_{T'}$  où le plongement  $j$  est réalisé dans  $\mathbf{G}_{2n} \times \theta$ , donc  $j$  est de la forme

$$j(a) = (Ad(g) \circ \theta)(a), \quad g \in \mathbf{G}_{2n} \quad (6.7)$$

Cette partie demande la comparaison entre les plongements. Soit alors  $T'$  le  $\theta$ -centralisateur d'un tore  $T$  qui est norme d'un tore  $S$  dans  $\mathbf{M}_{\mathbf{G}}$ . Considérons les plongements  $j : A_M \rightarrow A_T$  ( $\mathbf{G}$ -réalisés) et  $\tilde{j} : A_{\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}}}^\theta \rightarrow A_{T'}$  ( $\mathbf{G}_{2n}, \theta$ -réalisés). Le résultat suivant nous montre la comparaison des plongements. Considérons un plongement  $j$  ( $\mathbf{G}$ -réalisé) et  $\tilde{j}$  ( $\mathbf{G}_{2n}, \theta$ -réalisé). On a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} A_M & \xrightarrow{j} & A_T \\ \downarrow = & & \downarrow \simeq \\ A_{\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}}}^\theta & \xrightarrow{\tilde{j}} & A_{T'} \end{array}$$

**Lemme 6.1.2.** *Si  $j$  est  $\mathbf{G}$ -réalisé, alors  $\tilde{j}$  (défini par la commutativité du diagramme précédent) est  $\mathbf{G}_{2n}, \theta$ -réalisé.*

*Démonstration.* Nous avons clairement que  $A_M \simeq A_{\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}}}^\theta$  et  $A_T \simeq A_{T'}$ . Soit  $j(a) = gag^{-1}$ , avec  $g \in \mathbf{G}$ , et  $a \in A_M$ . On a  $\theta(a) = a^{-1}$ . Alors si  $x \in \mathbf{G}_{2n}$

$$x\theta(a)x^{-1} = xa^{-1}x^{-1}$$

mais le morphisme  $a \rightarrow a^{-1}$  est réalisé par conjugaison dans  $\mathbf{G}_{2n}$ . Alors si l'on considère ce même morphisme  $j$  comme le morphisme associé  $\tilde{j}$ , alors  $\tilde{j}$  est  $\mathbf{G}_{2n}$ -réalisé. Soit maintenant  $\tilde{j}(a) = gag^{-1}$  un plongement de  $A_{\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}}}^\theta \rightarrow A_{T'} \simeq A_T$ .  $A_T$  est un produit des tores

$$\begin{aligned} A_T &= \overbrace{(\mathbb{Q}_p^\times \times \cdots \times \mathbb{Q}_p^\times)}^{r\text{-fois}} \times \overbrace{(\mathbb{Q}_p^\times \times \cdots \times \mathbb{Q}_p^\times)}^{r\text{-fois}} \\ (x, x^{-1}) &\mapsto (x_1, \dots, x_r, x_1^{-1}, \dots, x_r^{-1}) \end{aligned}$$

Alors, pour chaque coordonnée nous avons que  $x \mapsto x$  ou bien  $x \mapsto x^{-1}$ . Donc

$$(x, x^{-1}) \mapsto (x^{\epsilon_1}, \dots, x^{\epsilon_r}, x^{-\epsilon_1}, \dots, x^{-\epsilon_r})$$

Ce qui nous ramène à deux possibilités.



En conclusion :

**Lemme 6.1.3.** *L'ensemble des  $\tilde{j}$  est de la forme*

$$\{\tilde{j}\} = \{j\} \coprod \{w \circ j\}$$

On peut écrire les caractères à partir de ces données. Dans le cas de  $\mathbf{G}$  (non tordu) nous avons

$$\Theta_{\mathbf{G},\pi}(t) = \sum_{j:A_M \rightarrow A_T} \theta_{j\delta}(t) \frac{|D_{M^j}(t)|^{1/2}}{|D_{\mathbf{G}}(t)|^{1/2}}. \quad (6.9)$$

Or  $j(A_M) \subset A_T$  et donc  $T$  commute à  $j(A_M)$ , ce qui implique que  $T \subset j(M)$  et  $j(M) = gMg^{-1}$  si  $g$  est un représentant du plongement  $j$ . Le terme  $\delta$  correspond à la représentation induisante  $|\det(m)|^s$ . De manière que  $\theta_{j\delta}(t) = \delta(g^{-1}tg)$ . De la même manière

$$D_{j(M)}(t) = D_M(g^{-1}tg),$$

mais les termes  $|D_{M^j}(t)|^{1/2}$  sont invariants par conjugaison.

Nous considérons maintenant l'analogie tordu de la formule des caractères. Soit donc

$$\Pi = \text{Ind}_{GL_n \times GL_n \times N_{2n}}^{GL_{2n}} |\det(m_1)|^s$$

On doit définir un opérateur d'entrelacement  $A_\theta$  entre  $\Pi$  et  $\Pi \circ \theta$ . Remarquons que le sous-groupe parabolique  $P = GL_n \times GL_n \times N_{2n}$  est  $\theta$ -stable. Sur l'espace  $\mathbb{C}$  de la représentation  $|\det(m_1)|^s$  induisante que l'on notera  $\delta_{2n}$ , on définit simplement

$$A_\theta^{\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}}} = 1$$

Il entrelace  $\delta_{2n}$  et  $\delta_{2n} \circ \theta$ . Puisque  $P$  est  $\theta$ -stable, alors  $A_\theta^{\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}}}$  s'induit trivialement à  $\Pi$  : Soit  $f$  une fonction dans l'espace de  $\Pi$ . Alors

$$A_\theta f(g) = A_\theta^{\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}}} f(\theta g) = f(\theta g)$$

On notera  $\Theta_{\mathbf{G}_{2n},\theta}^\Pi(g)$  le caractère tordu de  $\Pi(g)A_\theta$ , pour  $g \in \mathbf{G}_{2n}$  un élément  $\theta$ -régulier, c'est-à-dire, la classe de conjugaison associée à lui via la norme est régulière. C'est une fonction localement constante sur l'ensemble de ces éléments [Clo84].

Le caractère  $\Theta_{\mathbf{G}_{2n},\theta}^\Pi$  a pour support l'ensemble des éléments de  $\mathbf{G}_{2n}$  conjugués à  $\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}}$  [Clo84]. En copiant ligne à ligne la démonstration de van Dijk dans le cas non tordu ([vDj72], section §3) on obtient la formule suivante

$$\Theta_{\mathbf{G}_{2n},\theta}^\Pi(t) = \sum_{\tilde{j}} \Theta_{\tilde{j}\delta_{2n},\theta}(t) \frac{|D_{\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n},\theta}^{\tilde{j}}}(t)|^{1/2}}{|D_{\mathbf{G}_{2n},\theta}(t)|^{1/2}} \quad (6.10)$$

Dans cette formule

1.  $\Theta_{\tilde{j}\delta_{2n},\theta}$  est le caractère tordu (donc égal au caractère puisque  $A_\theta^{\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}}} = 1$ ) de  $\delta_{2n}$ , transporté par  $\tilde{j}$  (qui envoie le  $\theta$ -tore contenant  $t$  vers  $\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}}$ , par un calcul analogue au cas non tordu) et évalué en  $t$ . De même  $D_{\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}},\theta}^{\tilde{j}}(t)$  correspond au terme  $D_{\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}},\theta}(t)$ , transporté par  $\tilde{j}$  et évalué en  $t$ .
2. Rappelons que  $D_G(t)$  est égal à

$$\det(\text{Ad}(t) - 1)|_{\mathfrak{g}/\mathfrak{t}}$$

Ici, soit  $\mathfrak{t}_1$  le centralisateur tordu de  $t$  dans  $\mathfrak{g}_{2n}$ , c'est-à-dire

$$\mathfrak{t}_1 = \{X \in \mathfrak{g}_{2n} \mid (\text{Ad}(t) \circ \theta)X = X\}$$

Alors

$$D_{\mathbf{G}_{2n},\theta}(t) = \det(\text{Ad}(t) \circ \theta - 1)|_{\mathfrak{g}_{2n}/\mathfrak{t}_1}$$

3. De même  $D_{\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}},\theta}(t) = \det(\text{Ad}(t) \circ \theta - 1)|_{\mathfrak{m}_{2n}/\mathfrak{t}_1}$ .

Noter que les discriminants  $D_{\mathbf{G}_{2n},\theta}(t)$  et  $D_{\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}},\theta}(t)$  sont invariants par  $\theta$ -conjugaison. Par ailleurs, le centralisateur de  $t' = \text{Lie}(\mathbf{G}_{2n}^{\theta t})$  dans  $\mathfrak{g}_{2n}$  est un tore  $\mathfrak{t}$  de dimension  $2n$ . Dans la description donnée avant le lemme 6.1.2, c'est l'ensemble des

$$\{(t, {}^t s^{-1}) \mid t, s \in S\}$$

L'automorphisme  $\text{Ad} \circ \theta$  opère par 1 sur  $t'$ , par  $-1$  sur un espace complémentaire dans  $\mathfrak{t}$ , donc

$$D_{\mathbf{G}_{2n},\theta}(t) = 2^n \det(\text{Ad}(t) \circ \theta - 1)|_{\mathfrak{g}_{2n}/\mathfrak{t}} = 2^n D_{\mathbf{G}_{2n},\theta}^1(t) \quad (6.11)$$

On trouve de façon analogue

$$D_{\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}},\theta}(t) = 2^n D_{\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}},\theta}^1(t) \quad (6.12)$$

Par ailleurs, l'action de  $\theta$  sur  $\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}}$  s'identifie, comme on le verra plus loin, par un changement des variables évident, à l'automorphisme

$$(m_1, m_2) \mapsto (m_2, m_1)$$

c'est-à-dire à l'automorphisme de Galois dans le cas déployé  $F \times F/F$  (voir [A-C89], §I.5). Un calcul facile donne alors

$$D_{\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}},\theta}^1(t) = D_{\mathbf{M}_{\mathbf{G}}}^1(t') \quad (6.13)$$

si  $t = (x, 1)$  et  $t' = (x, {}^t x^{-1})$  sont associés. Si on récrit le calcul du caractère tordu, on obtient

$$\Theta_{\mathbf{G}_{2n},\theta}(t) = \sum_{\tilde{j}} \Theta_{\tilde{j}\delta_{2n}}(t) \frac{|D_{\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}},\theta}^{\tilde{j}}(t)|^{1/2}}{|D_{\mathbf{G}_{2n},\theta}^1(t)|^{1/2}} \quad (6.14)$$



Rappelons que pour  $t = (x, 1)$  et  $t' = (x, {}^t x^{-1})$  associés, Kottwitz et Shelstad ([K-S99], page 46) définissent le facteur  $\Delta_{IV}(t, t')$

$$\Delta_{IV}(t, t') = \frac{|\det(\text{Ad}(t) \circ \theta - 1)|_{\text{Lie}(G_{2n})/\text{Lie}(\text{Cent}(G_{2n}^{\delta_\theta}))}}{|\det(\text{Ad}(t') - 1)|_{\text{Lie}(G)/\text{Lie}(T_G)}} = \frac{|D_{\mathbf{G}_{2n}, \theta}^1(t)|^{1/2}}{|D_{\mathbf{G}}^1(t')|^{1/2}}$$

Soit  $\alpha$  l'automorphisme extérieur de  $\mathbf{G}$  donné par  $g \mapsto wgw^{-1}$  ( $w$  est un représentant de  $\text{Ext}(\mathbf{G}) = O_{2n}/SO_{2n}$ , et  $\pi' = \pi \circ \alpha$ ).

**Remarque 6.1.4.** La représentation  $\pi$  n'est pas isomorphe à  $\pi'$ . En effet la matrice de Hecke de  $\pi$  (pour les places non ramifiées) est la matrice diagonale

$$t_{\pi, p} = D(p^{\frac{n-1}{2}}t, p^{\frac{n-3}{2}}t, \dots, p^{\frac{1}{2}}t, p^{-\frac{1}{2}}t^{-1}, \dots, p^{-\frac{n-1}{2}}t^{-1})$$

or la matrice de Hecke de  $\pi'$  est alors

$$t_{\pi', p} = D(p^{\frac{n-1}{2}}t, p^{\frac{n-3}{2}}t, \dots, p^{-\frac{1}{2}}t^{-1}, p^{\frac{1}{2}}t, \dots, p^{-\frac{n-1}{2}}t^{-1})$$

puisque  $\alpha$  peut être réalisé, dans  $\widehat{\mathbf{G}}$ , par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1_{n-1} & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1_{n-1} \end{pmatrix}$$

Puisque  $|t| < p^{1/2}$ , ce deux matrices ne sont pas conjuguées par le groupe de Weyl de  $SO_{2n}$ .

**Théorème 6.1.5.** Pour  $t \in \mathbf{G}_{2n}$ ,  $\theta$ -régulier et  $t' \in \mathbf{G}$  régulier associés (section 6.2.1), nous avons l'égalité

$$\Theta_{\mathbf{G}_{2n}, \theta}(t) = (\Delta_{IV}(t, t'))^{-1} (\Theta_{\mathbf{G}, \pi}(t') + \Theta_{\mathbf{G}, \pi'}(t')) \quad (6.15)$$

où  $\pi'$  est la transformée de  $\pi$  par le morphisme extérieur de  $SO_{2n}$ .

*Démonstration.* A l'aide du lemme 6.1.3, on est ramené à comparer chaque terme associé à  $j$  des équations (6.9) et (6.14) appliqué à  $t'$ . On a  $\Theta_{j, \delta_{2n}}(t) = \theta_{j\delta}(t)$  et  $\Theta_{(w \circ j)\delta_{2n}}(t) = \theta_{j\delta}(wt)$ , qui apparaissent dans  $\Theta_\pi$  et  $\Theta_{\pi'}$ . Par ailleurs, les discriminants sont invariants algébriques. On est ramené à le calculer pour  $j = 1$  et alors :

$$\frac{|D_{\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}, \theta}}^1(t)|^{1/2}}{|D_{\mathbf{G}_{2n}, \theta}^1(t)|^{1/2}} = (\Delta_{IV}(t, t'))^{-1} \frac{|D_{\mathbf{M}_{\mathbf{G}}}^1(t')|^{1/2}}{|D_{\mathbf{G}}^1(t')|^{1/2}}$$

d'après (6.13) et la formule pour  $\Delta_{IV}$ . En conséquence, nous avons trouvé la forme du facteur  $\Delta_{IV}$ .  $\square$

Soit  $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{G}_{2n}, \mathbb{C})$  et  $f \in C_c^\infty(\mathbf{G}, \mathbb{C})$ . Fixons des mesures de Haar  $dg_{2n}$  et  $dg$  sur les groupes  $\mathbf{G}_{2n}$  et  $\mathbf{G}$ , respectivement. On dit que  $\phi$  et  $f$  sont associées (*matching orbital integrals*) si

$$SO_{t'}(f) = \sum_{t \rightarrow t'} \Delta(t, t') O_{\theta t}(\phi)$$

C'est-à-dire si l'intégrale orbitale *stable* de  $f$  est égale à la somme des intégrales orbitales tordues de  $\phi$  fois le facteur  $\Delta(t, t')$ , défini dans le chapitre 4 de [K-S99]. Les intégrales orbitales sont calculées à l'aide de  $dg_{2n}$  et  $dg$  et on suppose compatibilité entre les mesures sur les stabilisateurs tordus (voir [K-S99], page 71). Pour les éléments  $t, t'$  dans le support de  $\Theta_{\mathbf{G}_{2n}, \theta}^\Pi$  ou bien dans le support de  $\Theta_\pi$ , et  $\Theta_{\pi'}$ . On va montrer dans la section 6.3 que

1. Conjugaison stable équivaut à conjugaison.
2. Le terme  $\Delta(t, t')$  possède une expression simple dans notre cas, plus précisément on va montrer que  $\Delta(t, t') = \Delta_{IV}(t, t')$ .

**Proposition 6.1.6.** *Soient  $\phi$  et  $f$  des fonctions sur  $\mathbf{G}_{2n}$  et  $\mathbf{G}$  respectivement, associées. Alors*

$$\Theta_{\mathbf{G}_{2n}, \theta}^\Pi(\phi) = \frac{1}{2} |2^n|_F (\Theta_{\mathbf{G}, \pi}(f) + \Theta_{\mathbf{G}, \pi'}(f))$$

*Démonstration.* Soit en effet,  $\{T\}$  une famille de classes de  $\theta$ -conjugaison de  $\theta$ -tores dans  $\mathbf{G}_{2n}$ , et soit  $\{T_{\mathbf{G}}\}$  leur image par  $\mathcal{A}$  (voir la définition de la norme plus loin). Choisissons dans chaque  $T_{\mathbf{G}}$  un ensemble d'éléments réguliers  $U_{\mathbf{G}}$ , de sorte que  $\coprod U_{\mathbf{G}}$  soit un ensemble de représentants du support régulier de  $\pi$  et  $\pi'$  modulo  $\mathbf{G}$ -conjugaison. Alors, par intégration de Weyl on a pour  $\gamma, \delta$  associés,  $\delta = (x, 1)$ ,  $\gamma = (x, {}^t x^{-1})$  :

$$\begin{aligned} (\Theta_\pi + \Theta_{\pi'}, f) &= \sum_{T_{\mathbf{G}}} \int_{U_{\mathbf{G}}} |D_{\mathbf{G}}(\gamma)| (\Theta_\pi + \Theta_{\pi'})(\gamma) O_\gamma(f) d\gamma \\ &= \sum_{T_{\mathbf{G}}} \int_{U_{\mathbf{G}}} |D_{\mathbf{G}}(\gamma)| \Delta_{IV}(\gamma, \delta) \Theta_{\Pi, \theta}(\delta) O_\gamma(f) d\gamma \\ &= \sum_{T_{\mathbf{G}}} \int_{U_{\mathbf{G}}} |D_{\mathbf{G}}(\gamma)| \Delta_{IV}(\gamma, \delta)^2 \Theta_{\Pi, \theta}(\delta) T O_\delta(\phi) d\delta \\ &= \sum_{T_{\mathbf{G}}} \int_{U_{\mathbf{G}}} |D_{\mathbf{G}_{2n}, \theta}^1(\delta)| \Theta_{\Pi, \theta}(\delta) T O_\delta(\phi) d\delta \\ &= |2^{-n}|_F \sum_{T_{\mathbf{G}}} \int_{U_{\mathbf{G}}} |D_{\mathbf{G}_{2n}, \theta}(\delta)| \Theta_{\Pi, \theta}(\delta) T O_\delta(\phi) d\delta \end{aligned}$$

Sur tous les éléments considérés, conjugaison et conjugaison stable coïncident mais l'application  $\mathcal{A}$  (entre classes de conjugaison stables) identifie deux éléments et deux exactement sur l'ensemble des éléments  $\theta$ -réguliers. Par conséquent la dernière intégrale est

$$2|2^{-n}|_F \sum_T \int_{V_{\mathbf{G}_{2n}}} |D_{G,\theta}(\delta)| \Theta_{\Pi,\theta}(\delta) T O_\delta(\phi) d\delta$$

où  $\{T\}, \{V_{\mathbf{G}_{2n}} \subset T\}$  forment un ensemble de représentants pour la  $\theta$ -conjugaison. Mais la dernière intégrale est égale à

$$\int_{\mathbf{G}_{2n}} \Theta_{\Pi,\theta}(\delta) \phi(\delta) d\delta = \Theta_{\pi,\delta}(\phi).$$

□

## 6.2 Conséquence pour les fonctions non ramifiées

Considérons  $\phi$  une fonction sur  $F$  ( $p$ -adique dans ce cas) telle que  $\phi$  est dans l'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}_{2n} = \mathcal{H}(\mathbf{G}_{2n}, \mathbf{G}_{2n}(O_F))$  et que  $f = \lambda\phi$  est l'image par l'homomorphisme naturel

$$\mathcal{H}_{2n} \rightarrow \mathcal{H}_G = \mathcal{H}(\mathbf{G}, \mathbf{G}(O_F))$$

donnée en la transformée de Satake par  $\hat{\phi} \mapsto \hat{f}$  où l'élément  $\hat{\phi}(t_1, \dots, t_{2n}) \in \mathbb{C}[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_{2n}, t_{2n}^{-1}]^{S_{2n}}$  et  $S_{2n}$  est le groupe symétrique de  $2n$  variables, et  $\hat{f}(t_1, \dots, t_n, t_n^{-1}, \dots, t_1^{-1}) \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]^W$  où  $W$  est le groupe de Weyl de  $\mathbf{G}$  est obtenue par restriction de  $\hat{\phi}$ . Supposons que les mesures  $dg_{2n}, dg$  donnent mesure 1 à  $\mathbf{G}_{2n}(O_F)$  et  $\mathbf{G}(O_F)$ . Soient  $t_\Pi, t_\pi, t_{\pi'}$  les matrices de Hecke de  $\Pi, \pi$  et  $\pi'$  respectivement, dans les tores maximaux  $\hat{T}_{2n}$  et  $\hat{T}_G$  des groupes duaux. Alors, pour tout  $\phi \in \mathcal{H}_{2n}$  :

$$\text{trace}(\Pi(\phi)A_\theta) = \text{trace} \Pi(\phi) = \hat{\phi}(t_\Pi)$$

La théorie de l'endoscopie suppose que  $\phi$  est  $f = \lambda\phi$  sont associées (au sens des intégrales orbitales). On a de même pour  $f = \lambda\phi \in \mathcal{H}_G$

$$\text{trace}(\pi(\lambda\phi)) = (\widehat{\lambda\phi})(t_\pi) = \hat{\phi}(t_\pi)$$

et aussi

$$\text{trace}(\pi'(\lambda\phi)) = (\widehat{\lambda\phi})(t_{\pi'}) = \hat{\phi}(t_{\pi'})$$

Puisque  $t_\pi$  et  $t_{\pi'}$  sont conjuguées dans  $GL_{2n}(\mathbb{C})$  on trouve que

$$\text{trace}(\Pi(\phi)A_\theta) = \text{trace} \pi(f) = \text{trace} \pi'(f) \quad (6.16)$$

conformément à ce qu'on avait annoncé, au moins si  $p \neq 2, \infty$ .

**Remarque 6.2.1.** Le facteur  $|2^n|_F$  n'a pas d'importance. En effet, les arguments d'Arthur portent sur des fonctions adéliques  $\phi = \otimes_v \phi_v$ ,  $f = \otimes_v f_v$  ( $v$  parcourant les places de  $\mathbb{Q}$  y compris  $\infty$ ). Ce facteur n'intervient donc que pour  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{Q}_2$  et le produit de deux facteurs locaux est égal à 1. Pour les calculs globaux d'Arthur, tout se passe donc comme si l'on avait une identité sans ces facteurs. Ceci suggère, au moins dans notre cas, une correction évidente à la définition de Kottwitz et Shelstad pour ces facteurs de transfert.

**Remarque 6.2.2.** Ce théorème reste vrai si on remplace  $|det|^s$  par un caractère  $\chi(det)$ , où  $\chi$  est un caractère abélien.

### 6.3 Vérification de la formule pour le facteur de transfert $\Delta(t, t')$

Rappelons que  $t \in T \subset M_{\mathbf{G}_{2n}} \subset \mathbf{G}_{2n}$ , un  $\theta$ -tore et  $t' \in T' \subset M_{\mathbf{G}} \subset \mathbf{G}$  et  $t, t'$  sont associés. Le facteur de transfert a été défini d'une manière générale par Kottwitz et Shelstad [K-S99]. Ces facteurs de transfert, en général possèdent une structure assez compliquée, néanmoins dans notre cas ils deviennent plus simples. Dans notre cas, on a une application naturelle des groupes duaux ([Art05])

$${}^L\mathbf{G} \rightarrow {}^L\mathbf{G}_{2n}.$$

On n'a pas besoin de la  $z$ -extension  $H_1$  définie par Kottwitz et Shelstad ([K-S99], pages 20 – 21). Autrement dit,  $\mathbf{G}$  est le groupe noté  $H_1$  par Kottwitz et Shelstad. Or, d'après ([K-S99] page 71) on va définir un facteur

$$\Delta(\gamma, \delta)$$

où  $\gamma \in \mathbf{G}$  et  $\delta \in \mathbf{G}_{2n}$ . Cependant, il faut d'abord décrire les éléments associés (autrement dit la norme) dans notre situation, où elle admet une description simple.

#### 6.3.1 Éléments associés

On va utiliser les notations de [K-S99] chapitre 3 pour décrire la correspondance<sup>2</sup> entre éléments de  $\mathbf{G}$  (à conjugaison près) et éléments de  $\mathbf{G}_{2n}$  (à  $\theta$ -conjugaison près). Nous n'avons besoin d'utiliser celle-ci que pour des éléments  $\theta$ -réguliers et semi-simples assez particuliers, donc on ne donne la description complète que dans ce cas.

Dans certaines occasions il est mieux de traiter avec un automorphisme extérieur légèrement différent. Pour cette section on note  $\theta_0 : \mathbf{G}_{2n} \rightarrow \mathbf{G}_{2n}$  la conjuguée de la transposition inverse préservant le modèle de Whittaker [C-C],

---

<sup>2</sup>aussi appelée *norme*

## 6. Résultats locaux 6.3. Vérification de la formule pour le facteur de transfert $\Delta(t, t')$

donnée par  $g \mapsto J_0 {}^t g^{-1} J_0$ , où  $J_0$  est la matrice

$$J_0 = \begin{pmatrix} & & & & -1 \\ & & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & -1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & K_0 \\ K_0 & \end{pmatrix}$$

Nous allons décrire les classes de conjugaison dans  $\mathbf{G}(\overline{F})$  et  $\theta_0$ -conjugaison dans  $\mathbf{G}_{2n}(\overline{F})$ . Dans le cas de la  $\theta_0$ -conjugaison on note comme Kottwitz-Shelstad  $Cl_{ss}(\mathbf{G}_{2n}, \theta_0)$  l'ensemble de classes de  $\theta_0$ -conjugaison de  $\mathbf{G}_{2n}(F)$ . D'après [K-S99] page 26 on a une bijection

$$Cl_{ss}(\mathbf{G}_{2n}, \theta_0) \rightarrow T_{\theta_0}^{2n} / \Omega^{\theta_0} \quad (6.17)$$

Ici  $T^{2n} \simeq \mathbb{G}_m^{2n}$  est le tore diagonal et  $T_{\theta_0} = T / (1 - \theta_0)T$ . Si  $x = (x_1, \dots, x_{2n})$  est un élément général de  $T$  on a

$$\theta_0(x) = (x_{2n}^{-1}, \dots, x_1^{-1})$$

et

$$1 - \theta_0(x) = (x_1 x_{2n}, \dots, x_{2n} x_1)$$

Par conséquent, l'image est

$$\{(u_1, \dots, u_n, u_n, \dots, u_1)\} \quad \text{et} \quad T_{\theta_0} = T / \text{Im}(1 - \theta_0) \simeq \mathbb{G}_m^n$$

par l'application  $(x_1, \dots, x_{2n}) \mapsto (x_1/x_{2n}, \dots, x_n/x_{n+1})$ . L'ensemble  $\Omega^{\theta_0}$  est le centralisateur de  $\theta_0$  dans le groupe de Weyl  $\Omega_{\mathbf{G}_{2n}} = \mathfrak{S}_{2n}$ , donc  $\Omega^{\theta_0} = \mathfrak{S}_n \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$  opérant sur  $\mathbb{G}_m^n$  comme le groupe de Weyl étendu de type  $\mathcal{D}_n$ .

Par ailleurs, on a

$$Cl_{ss}(\mathbf{G}) = \mathbb{G}_m^n / \Omega_{\mathbf{G}}$$

où  $\Omega_{\mathbf{G}} = \mathfrak{S}_n \times S(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$  est le groupe de Weyl de  $\mathbf{G}$ .

Définissons, comme Arthur,  $\widehat{\mathbf{G}} \subset \widehat{\mathbf{G}}_{2n} = GL_{2n}(\mathbb{C})$  comme le centralisateur de  $s = \begin{pmatrix} -1_n & \\ & 1_n \end{pmatrix} \in \widehat{\mathbf{G}}$  (c'est une matrice de taille  $2n$ ). La matrice définissant le groupe  $\widehat{\mathbf{G}}$  est donc

$$J' = \begin{pmatrix} & -K_0 \\ K_0 & \end{pmatrix}$$

Le tore  $T = T_{2n}$  étant diagonal, ainsi que  $\widehat{T}$ , on a

$$\widehat{T}_{\theta_0} = (\widehat{T})^{\widehat{\theta}_0} = \{\text{diag}(t_1, \dots, t_n, t_n^{-1}, \dots, t_1^{-1})\} = \widehat{T}_{\mathbf{G}}$$

On a l'isomorphisme  $(\widehat{T})^{\theta_0} \simeq \widehat{T}_{\mathbf{G}}$  et donc l'isomorphisme canonique

$$T_{\mathbf{G}} \simeq T_{\theta_0}$$

On a ainsi :

**Proposition 6.3.1** (K-S, théorème 3.3.4). *Il existe une application canonique*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathbf{G}/\mathbf{G}_{2n}} : Cl_{ss}(\mathbf{G}) \rightarrow Cl_{ss}(\mathbf{G}_{2n}, \theta_0)$$

*Cette application est définie sur  $F$  ce qui équivaut à dire qu'elle commute avec l'action du groupe de Galois  $Gal(\overline{F}/F)$ .*

L'application inverse  $T_{\theta_0} \rightarrow T_{\mathbf{G}}$  est donnée par  $(x_1, \dots, x_{2n}) \rightarrow (x_1 x_{2n}^{-1}, \dots, x_{2n} x_1^{-1})$ . En particulier, elle envoie bijectivement

$$(x_1, \dots, x_n, 1, \dots, 1) \in T \mapsto (x_1, \dots, x_n, x_n^{-1}, \dots, x_1^{-1}) \in T_{\mathbf{G}}.$$

L'application norme  $\mathcal{A}$  est alors l'inverse. On a donc, avec les variables indiquées :

$$\mathcal{A} : \mathbb{G}_m^n / \Omega_{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbb{G}_m^n / \Omega^{\theta_0}$$

où  $\Omega_{\mathbf{G}}$  est le groupe de Weyl et  $\Omega^{\theta_0}$  le groupe de Weyl étendu.

Considérons les sous-groupes suivants de  $\mathbf{G}$  et de  $\mathbf{G}_{2n}$ . On suppose  $\mathbf{G}$  défini par la matrice  $J'$  (qui définit bien le sous-groupe déployé de type  $\mathcal{D}_n$ ). Pour  $x \in GL_n$  soit  $x' = K_0 {}^t x^{-1} K_0^{-1}$  où

1.  $\mathbf{G} \supset M = \{g, g'\}, g \in GL_n$ , sous-groupe de Levi de  $\mathbf{G}$ .
2.  $\mathbf{G}_{2n} \supset \mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}} = GL_n \times GL_n$  (plongé diagonalement).

Alors on a le lemme suivant.

**Lemme 6.3.2.**

1. Soit  $T$  un sous-groupe de Cartan de  $\mathbf{G}$  contenu dans  $M$ . Alors  $H^1(F, T) = \{1\}$ .
2. En particulier, si  $\gamma \in T$  est un élément régulier, tout élément stablement conjugué à  $\gamma$  (dans  $\mathbf{G}$ ) est conjugué à  $\gamma$ .

*Démonstration.* La partie 1) est le théorème 90 de Hilbert ( $T$  est le produit des tores  $Res_{K/F} \mathbb{G}_m$  où  $K$  est une extension de  $F$ ). La partie 2) s'en déduit puisque les classes de conjugaison dans une classe stable (régulière) sont paramétrées par

$$Ker(H^1(F, T) \rightarrow H^1(F, \mathbf{G}))$$

□

Rappelons un calcul fait dans l'article de Chenevier-Clozel [C-C]. Sur  $\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}}$  l'automorphisme  $\theta_0$  est donné par

$$(g_1, g_2) \mapsto (g'_2, g'_1).$$

L'application  $I$  donnée par  $(g_1, g_2) \mapsto (g_1, g'_2)$  conjugue  $\theta_0$  à l'application  $\sigma$  qui est donnée par

$$(g_1, g_2) \mapsto (g_2, g_1)$$

c'est-à-dire à la conjugaison galoisienne dans le cas trivial d'une extension décomposée  $F \times F/F$ , cas déjà connu par les travaux de changement de base d'Arthur-Clozel [A-C89]. On en déduit donc

## 6. Résultats locaux 6.3. Vérification de la formule pour le facteur de transfert $\Delta(t, t')$

### Lemme 6.3.3.

1. Soit  $\delta \in \mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}}(F)$ , alors  $\delta$  est fortement  $\theta_0$ -régulier (i.e. son centralisateur tordu est un tore) si et seulement si  $\delta\delta_0^\theta \in \mathbf{G}_{2n}$  est régulier.
2. Tout élément fortement  $\theta_0$ -régulier dans  $\mathbf{G}_{2n}$  est  $\theta_0$ -conjugué à un élément de la forme

$$\delta = (g_1, 1)$$

$g_1 \in GL_n$ , régulier.

3. Pour  $\delta$  fortement  $\theta_0$ -régulier dans  $\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}}$ , la  $\theta_0$ -conjugaison et la  $\theta_0$ -conjugaison stable coïncident.

*Démonstration.* La partie 1) et 2) se réduisent à des calculs faciles dans la situation du changement de base décomposé. Si  $\delta$  est du type 2), son  $\theta_0$ -centralisateur peut être calculé à l'aide de la bijection  $I$  et devient simplement

$$(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_2)^\sigma (g_1, 1)(x_1, x_2)^{-1} = (g_1, 1)$$

Alors  $x_1 = x_2^{-1}$ ,  $x_2 g_1 x_1 = x_1^{-1} g_1 x_1 = g_1$  et est donc isomorphe au centralisateur de  $g_1$ . La partie 3) se démontre comme dans le lemme 6.3.2, puisque la classe de  $\theta_0$ -conjugaison stable (à conjugaison près) est paramétrée par

$$\text{Ker}(H^1(\mathbf{G}_{2n}^{\delta, \theta_0} \rightarrow H^1(\mathbf{G}_{2n}))$$

où  $\mathbf{G}_{2n}^{\delta, \theta_0}$  est le centralisateur tordu. Dans ce cas les deux groupes  $H^1$  sont triviaux.  $\square$

**Remarque 6.3.4.** Il est vraisemblable que pour ces éléments les notions fortement  $\theta_0$ -régulier et fortement régulier coïncident (regarder aussi la remarque, dans le chapitre 2.12 de [C-C]). Comme nous n'utilisons la norme que pour le calcul des caractères, il nous suffit de considérer l'ensemble dense des éléments fortement  $\theta_0$ -réguliers. Enfin pour les éléments de la forme 2) du lemme 6.3.3, sont les seuls qui interviennent dans le calcul suivant et la norme prend une forme très simple.

**Lemme 6.3.5.** Soit  $T_1 \subset GL_n$  un tore maximal. L'application  $A$  qui envoie le tore  $T_1 \times T'_1$  (où  $T'_1 = K_0 {}^t T_1 K_0^{-1}$ ) vers  $T_1 \times \{1\} \subset \mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}}$  est donnée par

$$(t_1, t'_1) \mapsto (t_1, 1)$$

Puisque conjugaison et conjugaison stable coïncident, il suffit de le démontrer sur  $\overline{F}$ , pour le tore diagonal. Alors on a

$$(x_1, \dots, x_n, x_n^{-1}, \dots, x_1^{-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 1)$$

conformément à la formule.

## 6.4 Calcul du facteur de transfert

### 6.4.1 Facteur $\Delta_I$

On va décrire  $\Delta(\gamma, \delta)$ . On commence par le facteur  $\Delta_I(\gamma, \delta)$ , défini par Kottwitz et Shelstad ([K-S99] pages 31 – 33). On pose  $T_G = \text{Cent}_G(\gamma)$  qui est un tore et soit  $T_{2n} \subset \mathbf{G}_{2n}$ . Si on note  $\mathbf{G}_{2n}^{\text{sc}}$  le revêtement simplement connexe du sous-groupe  $(\mathbf{G}_{2n})_{\text{der}}$ ,

$$\mathbf{G}_{2n}^{\text{sc}} = SL_{2n}$$

et dans notre cas l'automorphisme  $\theta_0^* = \theta_0$  est le même et d'ailleurs  $\mathbf{G}_{2n}^{\text{sc}} = SL_{2n}$ . On va désigner par  $\mathbf{G}_{2n}^x$  ([K-S99] §4.2, page 31) le groupe de points fixes par  $\theta_0$  dans  $\mathbf{G}_{2n}^{\text{sc}}$  et  $T^x = T^{\text{sc}} \cap \mathbf{G}_{2n}^{\text{sc}}$ . On obtient  $\mathbf{G}_{2n}^x = SL_{2n}^{\theta_0}$ . Puisque  $\theta_0$  est décrit par la matrice  $J_0$ , qui est antisymétrique, alors

$$\mathbf{G}_{2n}^x = Sp_{2n}$$

On choisit d'après le lemme 3.3.B page 28 de [K-S99] une paire  $(B, T)$  pour  $\mathbf{G}_{2n}$  de sorte que l'application  $\mathcal{A} : T_G \rightarrow T/(\theta_0 - 1)T$  est définie sur  $F$  (et  $T$  est  $\theta_0$ -stable). On va fixer ce choix dès la définition du morphisme  $\mathcal{A}$  (pour nos éléments  $(\gamma, \delta)$ ) de sorte que

$$T = \{(t_1, t'_1)\} \subset GL_n \times GL_n$$

et  $B$  est un sous-groupe de Borel sur  $\overline{F}$  adapté à  $T$ , et  $t'_1 = K_0 {}^t t_1^{-1} K_0$ . Alors pour si on considère la partie simplement connexe on obtient

$$T^{\text{sc}} = \{(t_1, t'_1) \mid \det(t_1, t'_1) = 1\} = T$$

et  $T^x = T^{\text{sc}} \cap \mathbf{G}^x = T \cap Sp_{2n}$ . De manière que  $T^x$  est simplement un tore maximal de  $M^x$  qui est un sous-groupe de Levi de  $Sp_{2n}$ . Or nous avons comme auparavant  $H^1(F, T^x) = \{1\}$ . D'après [K-S99], page 33

$$\Delta_I(\gamma, \delta) = \langle a, s \rangle$$

où  $a \in H^1(F, T^x)$  et  $s$  dans le groupe dual se déduit de  $(T, \theta_0)$ , ce qui entraîne

$$\Delta_I(\gamma, \delta) = 1$$

### 6.4.2 Facteur $\Delta_{II}(\gamma, \delta)$

On a notre tore  $T = T_1 \times T'_1 \subset \mathbf{G}_{2n} = \mathbf{G}_{2n}^*$  et on va considérer les orbites de  $\text{Gal}(\overline{F}/F)$  dans le système de racines restreintes  $R_{\text{res}}(\mathbf{G}_{2n}, T)$ , d'après [K-S99] §1.3. Or cette restriction nous donne

$$R_{\text{res}}(\mathbf{G}_{2n}, T) = \{\alpha|_{T^{\theta_0}} \mid \alpha \in R(\mathbf{G}_{2n}, T)\}$$

On a  $T^{\theta_0} = \{(t, t')\}$ . On peut calculer les racines sur  $\overline{F}$  et alors

$$T^{\theta_0} = \{x_1, \dots, x_n, x_n^{-1}, \dots, x_1^{-1}\} \quad (6.18)$$



et les racines restreintes sont

$$\begin{cases} x_i \pm x_j & (i \neq j) \\ \pm 2x_i \end{cases}$$

L'ensemble  $R_{res} = R(\mathbf{G}^{\theta_0}, T^{\theta_0}) = R(\mathbf{G}^x, T^{\theta_0})$ . Notons que  $R_{res}$  est un système réduit. Nous utilisons le lemme 4.3.A de [K-S99]. Il faut considérer les orbites de racines ne figurant pas dans  $\mathbf{G}$  qui dans notre cas sont les racines  $\pm 2x_i$ . Rappelons ([K-S99] §1.3) que ce terme est défini à l'aide de la théorie de Langlands-Shelstad [L-S87]. A un système de racines  $\mathcal{R}$  (dans notre cas  $R_{res}(G, T)$ ) muni d'une action de  $\Gamma_F = Gal(\overline{F}/F)$ , Langlands-Shelstad associent des données

$$(\chi_{\alpha_{res}}, a_{\alpha_{res}}) \quad \alpha_{res} \in R_{res}$$

Ici  $\alpha_{res}$  définit une extension finie  $F_{\alpha_{res}}/F$  telle que  $Gal(\overline{F}/F_{\alpha_{res}}) = \{\sigma \in \Gamma_F \mid \sigma\alpha_{res} = \alpha_{res}\}$ , le terme  $a_{\alpha_{res}} \in F_{\alpha_{res}}^\times$  et  $\chi_{\alpha_{res}}$  est un caractère de  $F_{\alpha_{res}}^\times$  (voir [L-S87] §2.2 et §2.5). On va voir que les éléments  $a_{\alpha_{res}}$  ne sont pas très importants pour nous. Rappelons que dans notre cas

$$R_{res} = R(G^{\theta_0}, T^{\theta_0})$$

est formé des racines  $(\pm x_i \pm x_j, 2x_i)$  où  $T^{\theta_0}$  est décrit (sur  $\overline{F}$ ) par 6.18. En particulier, puisque  $T$  est dans notre cas un produit des tores induits  $\prod F_i^\times$  où  $F_i/F$  sont des extensions (plongés 2 fois dans  $\mathbf{G}_{2n}$ ), le groupe de Galois  $\Gamma_F$  permute de façon évidente les  $(\pm x_i \pm x_j)$  et les  $(\pm 2x_i)$ . En particulier,  $\Gamma_F$  permute les racines courtes (et les racines longues) et permute séparément les  $2x_i$  et les  $-2x_i$ . Si  $\alpha_{res} = 2x_i$ , on voit que les stabilisateurs dans  $\Gamma_F$  de  $\{\alpha_{res}\}$  est  $\{\pm\alpha_{res}\}$  coïncident. On notera ce groupe  $\Gamma_{\alpha_{res}}$ .

Cela dit, une famille de " $\chi$ -data" pour  $\alpha_{res} \in \mathcal{R}$  est donnée ([L-S87], §2.5) par :

$$\chi_{\alpha_{res}} \quad \text{un caractère de } F_{\alpha_{res}} \quad (\alpha_{res} \in \mathcal{R}).$$

vérifiant

1.  $\chi_{-\alpha_{res}} = \chi_{\alpha_{res}}^{-1}$ .
2.  $\chi_{\sigma\alpha_{res}} = \chi_{\alpha_{res}}^\sigma$ , avec  $\alpha_{res} \in \mathcal{R}$  et  $\sigma \in \Gamma_F$ .

et une autre condition ([L-S87], §2.5(iii), page 235) qui ne nous concerne pas, pour les  $\alpha_{res} = \pm(x_i \pm x_j)$ . Les  $\chi_{\alpha_{res}}$  sont indépendants (vérifiant bien sûr ces conditions).

En particulier, la famille donnée (pour les racines longues) par  $\chi_{\alpha_{res}} = 1$ , étendue de façon arbitraire aux racines courtes, vérifie les conditions. Pour tout choix des facteurs ( $a$ ) on voit donc que  $\Delta_{II}$ , donné d'après [K-S99] lemme 4.3.A, par

$$\Delta_{II} = \prod_{\alpha_{res}, \text{longue}} \chi_{\alpha_{res}} \left( \frac{\alpha(\delta) - 1}{a_{\alpha_{res}}} \right)$$

est égal à 1.

### 6.4.3 Facteur $\Delta_{III}$

Ce facteur est sans doute, le plus difficile à définir. Cependant il se simplifie car  $\mathbf{G}_{2n}$  est déployé et  $\theta_0$  fixe le tore et le Borel standard ainsi qu'un épinglage ([K-S99], page 63). La définition de  $\Delta_{III}$  fait appel à l'hypercohomologie d'un complexe à deux crans  $f : A \rightarrow B$  de  $\Gamma$ -modules, où  $\Gamma$  est le groupe de Galois absolu  $\Gamma_F$  de  $F$  ou le groupe de Weil  $W_F$ , voir l'appendice A dans [K-S99]. Rappelons seulement que

$$H^1(\Gamma_F, A \xrightarrow{f} B) = Z^1/B^1$$

où

$$Z^1 = \{(c, b) \mid c \in Z^1(\Gamma_F, A), b \in B, \partial b = f(c)\}$$

et l'opérateur différentiel  $\partial : A \rightarrow Z^1(\Gamma_F, A)$  est donné par  $\partial(a)(\sigma) = a^{-1}\sigma(a)$ ,  $\sigma \in \Gamma_F$ . L'ensemble de cobords  $B^1$  est

$$B^1 = \{(\partial a, f(a)) \mid a \in A\}$$

On a toujours une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H^0(\Gamma_F, A) \xrightarrow{f} H^0(\Gamma_F, B) \xrightarrow{j} H^1(\Gamma_F, A \xrightarrow{f} B) \xrightarrow{i} H^1(\Gamma_F, A) \xrightarrow{f} H^1(\Gamma_F, B) \quad (6.19)$$

où  $i : (c, b) \rightarrow$  classe de  $c \in H^1(\Gamma_F, A)$  et  $j : c' \mapsto (0, c')$  avec  $c' \in H^0(\Gamma_F, B) \subset B$ . Dans notre cas, heureusement, les constructions se simplifient.

Soit  $T \subset \mathbf{G}_{2n}$  un tore maximal  $\theta_0$ -stable contenu dans un sous-groupe de Borel  $\theta_0$ -stable (non nécessairement défini sur  $F$ ) noté  $B_{\overline{F}}$ . Soit  $T_{\theta_0} = T/(1 - \theta_0)T$  et  $N : T \rightarrow T_{\theta_0}$  l'application quotient. Soit  $\delta \in \mathbf{G}(F)$  et  $\overline{\gamma} \in T_{\theta_0}(F)$ . On dit que  $\overline{\gamma}$  est une norme de  $\delta$  si  $g^{-1}\delta\theta_0 g = t$ ,  $g \in \mathbf{G}_{2n}(\overline{F})$ ,  $t \in T(\overline{F})$  et  $N(t) = \overline{\gamma}$ .

Nous devons être précis sur les automorphismes considérés. On a  $\theta_0$  tel que  $g \mapsto J_0 {}^t g^{-1} J_0$  et  $J_0$  est notre matrice connue

$$J_0 = \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & 1 & \\ & \cdots & & \\ -1 & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & K_0 \\ K_0 & \end{pmatrix}$$

qui définit un groupe symplectique. Rappelons que  $\mathbf{G}$  est défini par la matrice

$$J' = \begin{pmatrix} & -K_0 \\ K_0 & \end{pmatrix}$$

Les calculs précédents (relatifs aux caractères) restent valables par changement de variables. On a dans  $\mathbf{G}_{2n}$  un sous-groupe de Levi

$$M = \begin{pmatrix} g & \\ & g' \end{pmatrix}$$

et son groupe dual

$$\widehat{M} \subset \widehat{\mathbf{G}} \subset GL_{2n}(\mathbb{C}) = \widehat{\mathbf{G}}_{2n}$$

donné par les mêmes équations. Par ailleurs Kotwittz et Shelstad ([K-S99], page 4) définissent

$$\widehat{\mathbf{G}}^1 = \widehat{\mathbf{G}}_{2n}^{\widehat{\theta}_0} = Sp(J_0, \mathbb{C})$$

le morphisme  $\widehat{\theta}_0$  s'identifie à  $\theta_0$  et

$${}^L\widehat{\mathbf{G}}^1 = \widehat{\mathbf{G}}^1 \times W_F$$

En particulier  ${}^L\widehat{\mathbf{G}}^1$  et  $\widehat{\mathbf{G}}$  ont en commun le sous-groupe

$$\widehat{M} = \left\{ \begin{pmatrix} g & \\ & g' \end{pmatrix} \right\} \times W_F$$

Or si  $T = T_1 \times T'_1$  est l'un de nos tores,  $\theta_0$  et  $\widehat{\theta}_0$  coïncident sur  $T$ . On a  $T_{\theta_0} \simeq T_1$ . D'après la définition de la norme  $\mathcal{A}$ , dire que  $\gamma \in T_{\theta_0}(F) = T_1(F)$  (tore maximal de  $\mathbf{G}$  via  $t \mapsto (t, t')$ ) est norme de  $\delta$  au sens ci-dessus est dire que  $\delta = \mathcal{A}(\gamma)$ . En particulier, pour  $\gamma$  fortement régulier,  $\delta$  ( $F$ -rationnelle) existe et est unique à  $\theta_0$ -conjugaison ( $F$ -rationnelle) près. A partir de ces données Kotwittz et Shelstad définissent

$$c = c_\sigma \in Z^1(\Gamma_F, T(\overline{F}))$$

par

$$c_\sigma = g\sigma(g)^{-1} = 1$$

dans notre cas, puisque  $g = \delta$  est rationnel. On a

$$c_\sigma \theta_0(c_\sigma)^{-1} = 1 = \gamma\sigma(\gamma)^{-1}$$

Posant  $A = B = T$ , avec  $T = T(\overline{F})$ ,  $f = 1 - \theta_0$ , on voit en revenant aux définitions que le terme

$$(c_\sigma = 1, \gamma) \in Z^1(\Gamma_F, T) \times T$$

est un hypercyclo, mais il n'est pas un hypercobord. Il définit donc un élément

$$\mathbb{V} \in H^1(\Gamma_F, T \xrightarrow{1-\theta_0} T)$$

Soit  $\widehat{T} \subset \widehat{\mathbf{G}}_{2n}$  le tore dual de  $T$  (avec son action non triviale de  $W_F$  ou  $\Gamma_F$  donnée par  $T_1 = K_1^\times \times \cdots \times K_r^\times$ , où  $K_i/F$  sont des extensions de corps). On a de toutes façons  $\widehat{T} = \widehat{T}_1 \times \widehat{T}_1$  où  $\widehat{T}_1 \subset GL_n(\mathbb{C})$ , et le tore  $T_G$  de  $G$  est isomorphe à  $T_1$ . D'après Langlands-Shelstad [L-S87] on peut naturellement construire un homomorphisme de  $L$ -groupes

$$\begin{array}{ccc} {}^L T_1 = \widehat{T}_1 \rtimes W_F & \longrightarrow & {}^L GL_n = GL_n(\mathbb{C}) \times W_F \\ & \searrow & \downarrow \\ & & W_F \end{array}$$

Notons  $\xi^1$  ce morphisme. On écrit  $\xi^1(\hat{t}_1, w) = (\xi^1(\hat{t}_1, w), w)$  par abus de notation. Alors le morphisme  $\xi : {}^L T_{\mathbf{G}} = \widehat{T}_1 \rtimes W_F \rightarrow {}^L \mathbf{G}_{2n}$ , donné par

$$(\hat{t}_1, w) \mapsto \left( \begin{pmatrix} \xi_1(\hat{t}_1, w) \\ \xi'_1(\hat{t}_1, w) \end{pmatrix}, w \right)$$

envoie  ${}^L T_{\mathbf{G}}$  dans le  $L$ -sous-groupe de Levi commun à  ${}^L \mathbf{G}$  et  ${}^L \mathbf{G}^1$ . Les deux morphismes  $\xi : {}^L T_{\mathbf{G}} \rightarrow {}^L \mathbf{G}$  et  $\xi_1 : {}^L T_{\mathbf{G}} \rightarrow {}^L \mathbf{G}^1$  de [K-S99] page 4 coïncident donc dans ce cas. Leur différence  $\xi \xi_1^{-1} : {}^L T_{\mathbf{G}} \rightarrow {}^L \mathbf{G}$  (qui en général, chez [K-S99] est seulement triviale sur  $\widehat{T}_{\mathbf{G}}$ ) définit un 1-cocycle  $A \in Z^1(W_F, \widehat{T})$ , donc  $A = 1$  dans notre cas.

Par ailleurs, par construction  $\widehat{G}$  et  $\widehat{G}^1$  apparaissent naturellement comme  $\theta_0$ -centralisateurs d'éléments ( $\theta_0$ -semisimples)  $s \in GL_{2n}(\mathbb{C})$ . Puisque  $\theta_0$  est symplectique  $\widehat{G}^1$  est simplement défini par  $s = 1$ . Il est égal à l'ensemble des éléments de  $\widehat{\mathbf{G}}_{2n}$  tels que

$$(g, \theta_0)1(g, \theta_0)^{-1} = gJ_0 {}^t g^{-1} J_0^{-1} = 1$$

Si on prend

$$s = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

de sorte que  $J = J_0 s$ , le groupe endoscopique tordu devient  $\widehat{\mathbf{G}}$ . Kottwitz et Shelstad considèrent la paire

$$(A, s) = (1, s) \in Z^1(W_F, \widehat{T}) \times \widehat{T}$$

On a  $f(1) = 1 = \partial s = s^{-1} \sigma(s)$ ,  $\sigma \in W_F$ . Car  $s$  est donné par (6.20), il appartient à  $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \subset \widehat{T}_1 \times \widehat{T}_1$ . Si  $T_1 = \prod K_i^\times$ , le  $\mathbb{G}_m$  diagonal est le  $L$ -groupe de  $F^\times$  (pour l'application  $T_1 \rightarrow \mathbb{G}_m/F$  donné par le produit des normes) et donc  $W_F$  ou  $\Gamma_F$  y opère trivialement.

Par conséquent

$$(c = A = 1, s) \in Z^1(W, \widehat{T}) \times \widehat{T}$$

est un hypercyclope qui n'est pas un hypercobord. Il définit donc un élément

$$\mathbb{A} \in H^1(W_F, \widehat{T} \xrightarrow{1-\theta_0} \widehat{T})$$

On définit

$$\Delta_{III}(\gamma, \delta) = \langle \mathbb{V}, \mathbb{A} \rangle \quad (6.21)$$

pour un accouplement de Tate en hypercohomologie dans la définition est l'objet principal de [K-S99], Appendix A. Rappelons que ni  $\mathbb{V}$  ni  $\mathbb{A}$  ne sont des classes triviales.

Heureusement un résultat d'isotropie, nous garantit la trivialité. Considérons la suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H^0(\Gamma_F, T) \xrightarrow{j} H^1(\Gamma_F, T \xrightarrow{f} T) \xrightarrow{i} H^1(\Gamma_F, T) \xrightarrow{f} \cdots \quad (6.22)$$

où  $f = 1 - \theta_0$ . Puisque  $T = T_1 \times T'_1$  est un tore induit, on a

$$H^1(\Gamma_F, T) = \{1\}$$

Donc nous avons le lemme suivant :

**Lemme 6.4.1.** *L'élément*

$$\mathbb{V} \in \text{Im}\left(H^0(\Gamma_F, T) \xrightarrow{j} H^1(\Gamma_F, T \xrightarrow{f} T)\right)$$

Remarquons que  $H^0(\Gamma_F, T)$ , quoique simple, n'est pas trivial et  $(1 - \theta_0)$  n'y est pas injective. De façon similaire pour  $\mathbb{A}$  nous avons la suite exacte en hypercohomologie :

$$\cdots \longrightarrow H^0(W, \widehat{T}) \xrightarrow{\widehat{j}} H^1(W, \widehat{T} \xrightarrow{1-\widehat{\theta}_0} \widehat{T}) \xrightarrow{\widehat{i}} H^1(W, \widehat{T}) \longrightarrow \cdots \quad (6.23)$$

où  $\widehat{i}$  est l'application  $(c, \widehat{t}) \rightarrow$  classe de  $c$  et  $\widehat{j}$  est l'application telle que  $c' \rightarrow (1, c')$ . Puisque ici  $(c, \widehat{t}) = (1, s)$ ,  $\widehat{i}(\mathbb{A}) = 1$ . Mais on a la proposition suivante :

**Proposition 6.4.2** (Kottwitz-Shelstad, page 137). *Pour  $u \in H^0(\Gamma_F, T)$ ,  $\widehat{z} \in H^1(W_F, \widehat{T} \rightarrow \widehat{T})$*

$$(j(u), \widehat{z}) = (u, \widehat{i}(\widehat{z}))$$

où le produit de droite est simplement l'accouplement de Langlands ([Lan79], [Lab84])

$$H^0(\Gamma_F, T) \times H^1(W, \widehat{T}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

Puisque  $\mathbb{V}$  est dans l'image de  $j$  et  $\widehat{i}(\mathbb{A}) = 1$ , on en déduit que  $\Delta_{III}(\gamma, \delta) = 1$ . On a enfin démontré :

**Théorème 6.4.3.** *Soient  $T = T_1 \times T'_1 \subset \mathbf{M}_{\mathbf{G}_{2n}}$  et  $T_{\mathbf{G}} = \{(t_1, t'_1)\} \subset M$  le tore associé, et  $\delta \in T$ ,  $\gamma \in T_{\mathbf{G}}$  des éléments associés. Alors*

$$\Delta(\gamma, \delta) = \Delta_{IV}(\gamma, \delta).$$



# Conclusion locale : paquets locaux d'Arthur

## 7.1 Définition des objets

Dans ce chapitre on établira la composition du paquet local d'Arthur pour nos paramètres. On déterminera la composition de ce paquet à partir des calculs des caractères tordus que l'on a faits auparavant, mais elle dépend aussi des conjectures d'Arthur. On introduira les données nécessaires. On va reprendre les notations du chapitre 6, à savoir,  $\mathbf{G} = SO_{2n}$  et  $\mathbf{G}_{2n} = GL_{2n}$ . On répète que toutes ces notions et constructions sont valables pour un corps de nombres  $F$ . Néanmoins on reste, comme partout dans cette mémoire, avec la convention que nos groupes sont définis sur  $\mathbb{Q}$ . On note  $\mathbb{Q}_v$  la complétion en une place locale  $v$ . De même, on note  $\Gamma_{\mathbb{Q}}$  le groupe de Galois de  $\mathbb{Q}$  (sur une clôture algébrique  $\overline{\mathbb{Q}}$ ) et l'analogue local  $\Gamma_{\mathbb{Q}_v}$ . Le groupe  $\mathbf{G} = SO_{2n}$  est un sous-groupe endoscopique tordu de  $\mathbf{G}_{2n}$ , plus précisément on considère  $\mathbf{G}$  comme un groupe endoscopique tordu *elliptique* de  $\mathbf{G}_{2n}$ . On rappelle qu'un groupe endoscopique tordu  $H$  est dit *elliptique* (comme groupe endoscopique de  $\mathbf{G}_{2n}$ ) si  $(Z(\widehat{H})^{\Gamma_{\mathbb{Q}}})^0$  est contenu dans  $Z(\widehat{\mathbf{G}_{2n}})^0$ . On note  $\mathcal{E}_{\text{ell}}(\mathbf{G}_{2n})$  l'ensemble des groupes endoscopiques tordus elliptiques de  $\mathbf{G}_{2n}$ . Afin de décrire tout l'ensemble des éléments dans  $\mathcal{E}_{\text{ell}}(\mathbf{G}_{2n})$  (des données endoscopiques tordues de  $\mathbf{G}_{2n}$ ), Arthur décompose l'entier  $2n$  comme une somme des entiers positifs

$$2n = N_0 + N_s \tag{7.1}$$

avec  $N_s$  pair. On dira qu'un élément  $H$  dans  $\mathcal{E}_{\text{ell}}(\mathbf{G}_{2n})$  est *primitif* si l'un des entiers  $N_0$  ou  $N_s$  est égal à zéro. On note  $\mathcal{E}_{\text{prim}}$  le sous-ensemble de  $\mathcal{E}_{\text{ell}}(\mathbf{G}_{2n})$  d'éléments primitifs. Le cas du groupe  $\mathbf{G} = SO_{2n}$  déployé correspond au cas où

$N_0 = 2n$ .

On va noter  $\tilde{\Psi}(\mathbf{G}_{2n})$  l'ensemble de paramètres  $\psi$  de  $\mathbf{G}_{2n}$  qui sont invariants par l'automorphisme extérieur  $\theta$ . De même, on pose  $\tilde{\Psi}(\mathbf{G})$  les paramètres de  $\tilde{\Psi}(\mathbf{G}_{2n})$  qui se factorisent par  ${}^L\mathbf{G}$ . Puisque l'on s'intéresse aux propriétés locales dans ce chapitre, on notera  $\hat{\mathbf{G}}_v$  la forme locale du groupe dual  $\hat{\mathbf{G}}$ . Soit  $SO_\gamma(f)$  l'intégrale orbitale stable de la fonction  $f$ ,  $f \in C_c^\infty(\mathbf{G}(\mathbb{Q}_v))$  pour  $\gamma \in \mathbf{G}$  un élément fortement régulier. On pose  $\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{G})$  l'ensemble

$$\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{G}) = \{\text{fonctions sur } \mathbf{G} \mid SO_\gamma(f) \text{ est invariante par } \text{Ext}(\mathbf{G})\}.$$

Pour tout paramètre  $\psi \in \tilde{\Psi}(\mathbf{G}_{2n})$  et toute fonction  $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{G}_{2n}(\mathbb{Q}_v))$  on considère la trace tordue locale

$$\text{trace}(\Pi(\psi)(\phi)A_\theta)$$

où  $\Pi$  est la représentation associée de  $\mathbf{G}_{2n}(\mathbb{Q}_v)$  et  $A_\theta$  est l'opérateur qui entrelace  $\Pi$  et  $\Pi \circ \theta$  (nous avons  $\Pi \simeq \Pi \circ \theta$ ). Cet opérateur d'entrelacement est défini par Arthur ([Art05], page 244).

Par ailleurs, si on suppose la forme tordue de la conjecture de Langlands-Shelstad pour le corps local  $\mathbb{Q}_v$ , on obtient une application de l'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}(\mathbf{G}_{2n}) \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{G})$ , donné par

$$\phi \rightarrow \phi^{\mathbf{G}} := f$$

où  $\phi$  et  $f$  sont associées (cf. chapitre 6). Pour arriver à comprendre cette relation dans notre cas, il nous faut calculer tous les objets définis par Arthur. Rappelons que dans le cas local on peut identifier  $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_v}$  à  $W_{\mathbb{Q}_v}$  le groupe de Weil absolu de  $\mathbb{Q}_v$ . La conséquence est que l'on obtient un paramètre  $\psi$  donné par :

$$\psi : W_{\mathbb{Q}_v} \times SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_{2n}(\mathbb{C}) \hookrightarrow GL_{2n}(\mathbb{C})$$

Ce paramètre local, dans notre cas a la forme particulière :

$$\psi = \mu \otimes sp_n \oplus \mu^{-1} \otimes sp_n \tag{7.2}$$

où  $sp_n$  est la représentation (symplectique) de degré  $n$  de  $SL_2(\mathbb{C})$  et  $\mu$  est le caractère  $x \mapsto |x|^s$ ,  $s$  un nombre complexe. De manière que la représentation associée à ce paramètre est la représentation induite

$$\Pi(\psi) = \text{Ind}(\mu \circ \det \otimes \mu^{-1} \circ \det). \tag{7.3}$$

On rappelle que l'on considère toujours l'induction normalisée. La variable  $s$  satisfait  $|s| < \frac{1}{2}$ . En conséquence, si  $\phi$  est une fonction dans  $\mathcal{H}(\mathbf{G}_{2n})$ , le caractère tordu  $\phi_{\mathbf{G}_{2n}}(\psi)$  est défini comme :

$$\phi_{\mathbf{G}_{2n}}(\psi) := \text{trace}(\Pi(\psi)(\phi)A_\theta)$$

où  $A_\theta$  est un opérateur d'entrelacement évident associé à  $\theta$ . Pour ce calcul, on considère plutôt  $A_\theta = A_{\theta_0}$ , avec la matrice  $J_0$  qui fixe le modèle de Whittaker



(Arthur applique la théorie locale des modèles de Whittaker à cette représentation locale pour définir une extension de la représentation au groupe non connexe  $GL_{2n} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , [Art05], page 244). On va plonger cette représentation (7.3) dans une représentation plus grande que l'on va noter  $R$

$$R = \text{Ind}_{GL_n \times GL_n}^{\mathbf{G}_{2n}} \left( \text{Ind}_{B_n}^{GL_n} (\mu \otimes \cdots \otimes \mu) \delta_{B_n} \otimes \text{Ind}_{B_n}^{GL_n} (\mu^{-1} \otimes \cdots \otimes \mu^{-1}) \delta_{B_n} \right) \quad (7.4)$$

$B_n$  est le sous-groupe de Borel habituel de  $GL_n$ , et  $\delta_{B_n}$  est le caractère modulaire de  $B_n$ . Cette représentation  $R$  a comme un quotient la représentation  $\Pi(\psi)$  donnée par (7.3)

$$R \twoheadrightarrow \Pi(\psi)$$

Arthur définit  $A_\theta$  comme l'opérateur quotient de celui, sur  $R$ , qui fixe le vecteur de Whittaker et est égal à 1 sur le vecteur non ramifié. C'est l'opérateur que nous avons utilisé pour la représentation quotient. Un autre objet dont on a besoin est le groupe  $\mathcal{L}_\psi$  (pages 240-241 [Art05]). Arthur définit un groupe noté  $\mathcal{L}_\psi$  associé à un paramètre  $\psi \in \tilde{\Psi}(\mathbf{G}_{2n})$  se factorisant par  ${}^L\mathbf{G}$  (c'est-à-dire  $\psi \in \tilde{\Psi}(\mathbf{G})$ ). Par définition de  $\tilde{\Psi}(\mathbf{G})$ , ce paramètre est autodual par rapport à l'automorphisme  $\theta$ . Rappelons qu'en général un tel paramètre  $\psi$  est de la forme

$$\psi = l_1 \psi_1 \boxplus \cdots \boxplus l_r \psi_r \quad (7.5)$$

où les  $\psi_i$  sont définis par (3.5) (cf. chapitre 3). L'automorphisme  $\theta$  agit par permutation sur les indices  $1 \leq i \leq r$ . Un cas particulièrement intéressant est celui des paramètres *primitifs* (on dit qu'un paramètre est primitif si  $r = l = 1$ , c'est-à-dire  $\psi$  est une représentation cuspidale automorphe  $\mu_1$  de  $\mathbf{G}_{2n}$ ). Soit  $\mathcal{I}$  l'ensemble des  $i$  tels que  $\psi_i^\theta = \psi$ . Le complément de  $\mathcal{I}$  sont deux ensembles disjoints  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{J}'$ , lesquels sont en bijection. La bijection est donnée l'application  $j \mapsto j'$  telle que  $\psi_j^\theta = \psi_{j'}$  pour tout  $j \in \mathcal{J}$ . En résumé,  $\psi$  peut être écrit comme

$$\psi = \left( \boxplus_{i \in \mathcal{I}} l_i \psi_i \right) \boxplus \left( \boxplus_{j \in \mathcal{J}} l_j (\psi_j \boxplus \psi_{j'}) \right) \quad (7.6)$$

Pour  $i \in \mathcal{I}$ , Arthur applique l'hypothèse d'induction globale et locale (page 240 [Art05]) à la représentation autoduale cuspidale automorphe  $\mu_i$  de  $GL_{m_i}$  associée à  $\psi_i$ . Ceci nous définit une donnée endoscopique  $G_i = G_{\mu_i}$  dans  $\mathcal{E}_{\text{prim}}(G_{m_i} \times \theta)$ . Si  $j \in \mathcal{J}$  on pose  $G_j = GL_{m_j}$ . On obtient donc un groupe  $G_\alpha$  sur le corps local  $\mathbb{Q}_v$  pour  $\alpha \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ . Soit  ${}^L G_\alpha$  la forme de Galois de son  $L$ -groupe. Arthur définit le groupe  $\mathcal{L}_\psi$  comme le produit fibré de ces groupes sur  $\Gamma_{\mathbb{Q}_v}$ .

$$\mathcal{L}_\psi = \prod_{\alpha \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}} ({}^L G_\alpha \rightarrow \Gamma_{\mathbb{Q}_v}) \quad (7.7)$$

On peut définir ce groupe  $\mathcal{L}_\psi$  locale et globalement. On s'intéresse à la forme locale. Ce groupe  $\mathcal{L}_\psi$  est une extension du groupe de Galois. On suppose toujours que  $\psi$  se factorise par  ${}^L \mathbf{G}_v$ , donc il doit exister un  $L$ -morphisme  $\psi_{\mathbf{G}_v}$

$$\psi_{\mathbf{G}_v} : \mathcal{L}_\psi \times SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L \mathbf{G}_v$$

On définit  $\tilde{\psi}$  comme la composition  $\xi \circ \psi_{\mathbf{G}_v}$ , où  $\xi$  est le plongement qui fait partie de la donnée endoscopique tordue. Rappelons que  $\psi$  et  $\xi$  sont, en général, des  $GL_{2n}(\mathbb{C})$ -classes de conjugaison d'homomorphismes, de manière que  $\psi_{\mathbf{G}_v}$  est défini modulo conjugaison. En conséquence,  $\tilde{\psi}$  définit un plongement

$$\tilde{\psi} : \mathcal{L}_\psi \times SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL_{2n}(\mathbb{C}) \times \Gamma_{\mathbb{Q}_v} = {}^L \mathbf{G}_{2n}$$

Enfin, il existe un autre objet qui nous sera utile : le groupe  $S_\psi = S_\psi(\mathbf{G}_v) = \text{Cent}_{\widehat{\mathbf{G}}_v}(\psi_{\mathbf{G}_v}(\mathcal{L}_\psi \times SL_2(\mathbb{C})))$  d'éléments de  $\widehat{\mathbf{G}}_v$  qui centralisent l'image de  $\psi_{\mathbf{G}_v}$ . On s'intéresse au groupe quotient  $\mathcal{S}_\psi = S_\psi / S_\psi^0 Z(\widehat{\mathbf{G}}_v)^{\Gamma_{\mathbb{Q}_v}}$  qui est un groupe abélien fini. Dans ce groupe abélien fini, il y a un élément canonique dans  $S_\psi$  que l'on va noter  $s_\psi$  et défini comme

$$s_\psi = \psi_{\mathbf{G}_v} \left( 1, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \quad (7.8)$$

Son image dans  $\mathcal{S}_\psi$  sera notée  $\bar{s}_\psi$ .

On rappelle que pour notre cas, le paramètre  $\psi$  a la forme :

$$\psi = \psi_1 \boxplus \psi_2 = \mu \otimes sp_n \oplus \mu^{-1} \otimes sp_n$$

Pour ce paramètre  $\psi$ , nous avons deux cas possibles :

1.  $\mu \neq \mu^{-1}$  (que l'on va appeler le cas régulier). Alors  $\psi_1 \neq \psi^\theta$ . On pose  $G_1 = GL_1$  et  $\mathcal{L}_\psi = GL_1 \times \Gamma_{\mathbb{Q}_v}$ , où on rappelle que  $\Gamma_{\mathbb{Q}_v}$  est le groupe de Galois de  $\mathbb{Q}_v$ . Cela se traduit par un morphisme

$$\mathcal{L}_\psi \times SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL_{2n}(\mathbb{C})$$

donné par

$$(z, s) \mapsto z sp_n(s) \oplus z^{-1} sp_n(s)$$

( $sp_n$  la représentation irréductible de  $SL_2$  de degré  $n$ ).

2.  $\mu = \mu^{-1} = \epsilon$ , ce qui entraîne  $\epsilon^2 = 1$ . Alors le paramètre  $\psi$  est de la forme

$$\psi = \epsilon \otimes sp_n \oplus \epsilon \otimes sp_n$$

Dans ce cas on pose  $G_0 = SO_1 = \{1\}$ . On a donc un plongement

$$\mathcal{L}_\psi = SO_1 \times \Gamma_{\mathbb{Q}_v} \rightarrow GL_1(\mathbb{C}) \times \Gamma_{\mathbb{Q}_v}$$

donné par

$$(1, \gamma) \mapsto (\epsilon(\gamma), \gamma)$$

On pose alors  $\mathcal{L}_\psi = \{1\} \times \{1\} \times \Gamma_{\mathbb{Q}_v}$  et on a  $\mathcal{L}_\psi \times SL_2 \rightarrow \widehat{GL}_{2n} \times \Gamma_{\mathbb{Q}_v}$ . Soit  $\tilde{\psi}$  le morphisme tel que

$$\tilde{\psi}(\gamma, s) = \epsilon(\gamma) sp_n(s) \oplus \epsilon(\gamma) sp_n(s)$$

Alors le paramètre  $\tilde{\psi}$  se factorise par  $SO_{2n}(\mathbb{C}) = \widehat{\mathbf{G}}_v \subset \widehat{\mathbf{G}}_{2n}$ .

Nous devons calculer les groupes  $S_\psi$  et  $\mathcal{S}_\psi$  dans chaque cas. Supposons  $\widehat{\mathbf{G}}$  défini par la matrice

$$J_1 = \begin{pmatrix} & 1_n \\ 1_n & \end{pmatrix}$$

ce qui est possible (le plongement d'Arthur, réalisant  $\widehat{\mathbf{G}}$  comme centralisateur tordu de  $s = \begin{pmatrix} 1_n & \\ & -1_n \end{pmatrix}$  dans  $\mathbf{G}_{2n}$ , es conjugué à celui-ci). Nos deux morphismes  $\widetilde{\psi}$  passent par le sous-groupe de Levi

$$\widehat{M} = \left\{ \begin{pmatrix} g & \\ & g' \end{pmatrix} \right\} \subset \widehat{\mathbf{G}}$$

où  $g \in GL_n(\mathbb{C})$  et  $g' = {}^t g^{-1}$

**Cas 1.**

Nous avons le morphisme

$$(z, s) \mapsto (z sp_n(s), z^{-1} sp'_n(s)) \in \widehat{M}.$$

On suppose  $z \neq z^{-1}$ . On vérifie aisément que le centralisateur dans  $\widehat{\mathbf{G}}_{2n}$  est isomorphe à  $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \simeq \left\{ \begin{pmatrix} z^{1_n} & \\ & w^{1_n} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C}^\times \right\}$ . Le centralisateur  $S_\psi$  dans  $\widehat{\mathbf{G}}$  est donc  $\left\{ \begin{pmatrix} z^{1_n} & \\ & z^{-1} 1_n \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{C}^\times \right\} \simeq \mathbb{C}^\times$ .

**Cas 2.**

L'élément  $\epsilon(\gamma)$  opérant diagonalement, le centralisateur est celui de

$$\{(sp_n(s), sp'_n(s))\}$$

Soit  $K : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  un isomorphisme entre  $sp_n$  et  $sp'_n$ . Alors  $sp_n$  étant symplectique,  ${}^t K = -K$ . Le centralisateur dans  $\widehat{\mathbf{G}}_{2n}$ , isomorphe à  $GL_2(\mathbb{C})$ , est l'ensemble des matrices

$$g_{2n} = \begin{pmatrix} a & bK \\ cK^{-1} & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \text{ des scalaires,}$$

par conséquent isomorphe à  $GL_2(\mathbb{C})$  avec la identification  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Le centralisateur dans  $\widehat{\mathbf{G}}$  est donné par

$${}^t g_{2n} J_1 g_{2n} = J_1.$$

Puisque  ${}^t K = -K$ , cette équation est équivalente à  $ad - bc = 1$ , donc  $S_\psi = SL_2(\mathbb{C})$ .

Donc pour le groupe quotient  $\mathcal{S}_\psi$  on trouve dans les deux cas :

$$\mathcal{S}_\psi = \{1\}$$

Calculons maintenant l'élément  $s_\psi = \text{Im}(\psi_G(1, \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}))$  dans  $S_\psi$  et l'image  $\overline{s_\psi}$  dans  $\mathcal{S}_\psi$ .

Pour le deux cas la matrice  $\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \in \{a, a^{-1}\} \simeq \mathbb{C}^\times$ , par suite l'élément  $\overline{s_\psi} \in \mathcal{S}_\psi$  est égal à 1 dans tous les cas.

On pose  $\tilde{\Pi}(\mathbf{G})$  l'ensemble de  $Ext_{\mathbf{G}_{2n}}(\mathbf{G})$ -orbites dans l'ensemble  $\Pi(\mathbf{G})$  de représentations irréductibles de  $\mathbf{G}$ . On dénote  $\widehat{\Pi}_{\text{fin}}(\mathbf{G})$  l'ensemble de combinaisons linéaires formelles finies d'éléments dans  $\tilde{\Pi}(\mathbf{G})$ . Tout élément  $\pi \in \widehat{\Pi}_{\text{fin}}(\mathbf{G})$  détermine une forme linéaire sur  $\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{G})$  :

$$f \mapsto f^{\mathbf{G}}(\pi) \quad (\text{sa trace})$$

Avec ces données, Arthur dans son théorème 30.1 ([Art05] page 246) affirme pour un corps local  $\mathbb{Q}_v$ ,  $G$  un groupe endoscopique elliptique primitif de  $\mathbf{G}_{2n}$  et pour tout paramètre  $\psi \in \tilde{\Psi}(G)$  l'existence d'une forme linéaire stable  $f \rightarrow f^G(\psi)$  sur  $\tilde{\mathcal{H}}(G)$  telle que

$$\text{trace}(\Pi(\phi)I_\theta) = f^G(\psi)$$

pour  $\phi, f$  des fonctions associées. Ce même théorème d'Arthur établit que pour chaque paramètre  $\psi \in \tilde{\Psi}(G)$ , il existe un sous-ensemble fini  $\tilde{\Pi}_\psi$  de l'ensemble des combinaisons linéaires non négatives des représentations unitaires de  $G$  modulo le groupe d'automorphismes extérieurs (lequel dans notre cas est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ) et une application injective

$$\pi \mapsto \langle \cdot, \pi \rangle, \quad \pi \in \tilde{\Pi}_\psi \quad (7.9)$$

de l'ensemble  $\tilde{\Pi}_\psi$  vers le groupe de caractères  $\widehat{\mathcal{S}}_\psi(G)$ , satisfaisant la condition suivante :

$$f^{\mathbf{G}}(\psi) = \sum_{\pi \in \tilde{\Pi}_\psi} \langle s_\psi, \pi \rangle f_G(\pi), \quad f \in \tilde{\mathcal{H}}(G) \quad (7.10)$$

où  $s_\psi$  est l'élément défini par (7.8) et  $f_G(\pi) = \text{trace} \pi(f)$ . On peut énoncer le résultat dans notre cas.

**Théorème 7.1.1.** *Soit  $\mathbf{G}$  le groupe spécial orthogonal déployé  $SO_{2n}$ , et  $\psi$  le paramètre associé à notre représentation  $\pi = \text{Ind}_{GL_n}^{SO_{2n}}(|\det|^s \otimes \epsilon)$ . Alors*

1. *Il existe une forme linéaire stable  $f \mapsto f^{\mathbf{G}}(\psi)$  sur  $\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{G})$  telle que*

$$f^{\mathbf{G}}(\psi) \quad \text{soit égale à } \text{trace}(\Pi(\phi)I_\theta) = \text{trace}(\pi(f))$$

*où  $\phi, f$  sont associées au sens des intégrales orbitales stables (cf. chapitre 6).*

2. *Si  $f \in \tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{G})$  est non ramifiée,*

$$f^{\mathbf{G}}(\psi) = \text{trace} \pi(f) = \text{trace} \pi'(f).$$

*En particulière  $\pi$  (qui est isomorphe à  $\pi'$  dans  $\tilde{\Pi}_\psi$ ) est l'unique élément non ramifié de  $\tilde{\Pi}_\psi$ , avec multiplicité 1.*

*Démonstration.* La partie 1 est le théorème 30.1 d'Arthur ([Art05]), dans notre cas où  $\mathcal{S}_\psi = \{1\}$ . D'après (7.10) on a alors

$$f^{\mathbf{G}}(\psi) = f_{\mathbf{G}}(\pi_0)$$

où  $\pi_0$  est l'unique élément de  $\tilde{\Pi}_\psi$ . D'après les résultats du chapitre 6, on sait que, pour  $\phi$  et  $f$  associées

$$\begin{aligned} f^{\mathbf{G}}(\psi) &:= \text{trace}(\Pi(\phi)I_\theta) \quad (\Pi = \Pi(\psi)) \\ &= \frac{1}{2}(\text{trace } \pi(f) + \text{trace } \pi'(f)) = \text{trace } \pi(f) = \text{trace } \pi'(f), \end{aligned}$$

les intégrales orbitales de  $f$  étant stables par l'automorphisme extérieur. Si  $\phi$  (et donc  $f$ ) est non ramifiée, l'égalité

$$\text{trace } \pi_0(f) = \text{trace } \pi'(f)$$

montre que  $\pi$ , avec multiplicité 1 est l'unique élément non ramifié de la représentation (avec multiplicités)  $\pi_0$ .  $\square$

**Remarque 7.1.2.** 1. Comme nous l'a fait remarquer Colette Mœglin, la norme vers  $\mathbf{G}$  est surjective. On a donc, en fait, caractérisé la *trace*  $\pi_0(f)$  pour toute fonction  $f \in \tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{G})$ . Ceci implique donc que  $\pi_0 = \pi = \pi'$  (avec multiplicité 1).

2. Le calcul reste vrai à la place réelle (ou complexe pour un corps de nombres  $F$ ).

## 7.2 Irréductibilité locale

On tient à remercier vivement à Colette Mœglin de son aide pour l'argument exposé ci-dessous. Une question naturelle une fois que l'on a fixé le paramètre  $\psi$ , une fois que l'on a calculé les groupes  $\mathcal{L}_\psi$  et  $\mathcal{S}_\psi$ , est d'étudier l'irréductibilité de la représentation locale. Donc le formalisme d'Arthur nous amène à considérer les représentations

$$W_{\mathbb{Q}_v} \times SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_{2n}(\mathbb{C})$$

de la forme

$$\chi \otimes sp_n \oplus \chi^{-1} \otimes sp_n$$

où  $\chi$  est un caractère non ramifié. Si  $\chi$  est unitaire et  $\chi^2 \neq 1$  ou si  $\chi = ||^s$  pour  $s$  réel petit (comme on le sait dans notre cas d'après Kim et Sarnak) l'induite est irréductible d'après des résultats connus. Considérant le cas où  $\chi$  est d'ordre 2, c'est-à-dire  $\chi = \epsilon$ . La calcul fait dans la section 7.1 montre que le centralisateur  $\mathcal{S}_\psi$  associé est connexe. D'après Arthur, la représentation induite doit être donc irréductible.

Langlands donne la réponse dans la cas de l'induction parabolique d'une série discrète  $\delta$ . Dans ce cas, on a des résultats bien connus pour savoir si la représentation

$$\text{Ind}_{GL_n}^{\mathbf{G}}(\delta \otimes s) := \text{Ind}_{GL_n}^{\mathbf{G}}(\delta \otimes |det|^s), \quad s \in i\mathbb{R},$$

induite à partir du parabolique maximal  $GL_n$  de  $\mathbf{G}$ , est irréductible (voir par exemple [Wal03]). Ces critères d'irréductibilité sont :

1. Si  $\delta \otimes s \not\cong w_0(\delta \otimes s)$ , où  $w_0$  est l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl  $W_G$ , alors la représentation induite est irréductible.
2. Dans le cas contraire, on considère  $s + t$  ( $s \in i\mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  et  $t > 0$ ) et on étudie l'opérateur d'entrelacement  $A(w_0, t)$

$$\text{Ind}_{GL_n}^G(\delta \otimes s \otimes w_0 t) \xrightarrow{A(w_0, t)} \text{Ind}_{GL_n}^G(\delta \otimes (s + t))$$

Si l'opérateur d'entrelacement  $A(w_0, t)$  a un pôle en  $t = 0$ , alors l'induite est irréductible.

Dans notre cas, la représentation induisante n'est pas une série discrète. On induit à partir du sous-groupe parabolique contenant  $M = GL_n$  comme sous-groupe de Levi, la représentation  $\text{Ind}(\text{triv} \otimes s) = \pi$ , on rappelle que l'on est dans le cas non ramifié partout et donc les représentations locales  $\pi_v$  sont non ramifiées. Le fait que la représentation  $\pi$  est non ramifiée implique qu'elle est une représentation de l'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}(SO_{2n}, I)$ , où  $I$  est le sous-groupe de Iwahori de  $SO_{2n}$ . On va se servir d'une involution de cette algèbre,  $h \mapsto h^*$ ,  $h \in \mathcal{H}(SO_{2n}, I)$ , étudié par Marie-Anne Aubert dans [Aub95]. Alors, nous avons le fait que la représentation de l'algèbre de Hecke est irréductible si et seulement si la représentation transformée par l'involution est aussi irréductible.

Il est connu que cette involution permute la représentation triviale et la représentation de Steinberg  $St$ . On peut donc se servir de cette involution et étudier la représentation de Steinberg comme une induite.

La représentation de Steinberg est plongée dans une représentation induite à partir du sous-groupe de Borel principal  $B$  :

$$St \hookrightarrow \text{Ind}_B^{GL_n}(|\frac{n-1}{2}|, \dots, |\frac{1-n}{2}|)$$

de manière que l'on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Ind}_{GL_n}^{SO_{2n}}(St \otimes \epsilon | |^s) & \hookrightarrow & \text{Ind}_B^{SO_{2n}}(|\frac{n-1}{2} + s + \epsilon|, \dots, |\frac{1-n}{2} + s + \epsilon|) \\ \downarrow A_{w_0} & & \downarrow A_w \\ \text{Ind}(St \otimes \epsilon | |^{-s}) & \hookrightarrow & \text{Ind}_B^{SO_{2n}}(|\frac{n-1}{2} - s + \epsilon|, \dots, |\frac{1-n}{2} - s + \epsilon|) \end{array}$$

où  $A_w$  est l'opérateur d'entrelacement "long" pour  $B \subset SO_{2n}$ . L'opérateur  $A_w$  entrelace les éléments  $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_n^{-1}, \dots, x_1^{-1})$ . Cet opérateur  $A_w$  est un produit d'opérateurs réalisés dans  $GL_2$  ou  $SO_4$ . Considérons le cas le plus intéressant, celui de  $SO_4$ . Alors

$$\begin{array}{ccc} \text{Ind}_{GL_2}^{SO_4}(St \otimes \epsilon | |^s) & \hookrightarrow & \text{Ind}_B^{SO_4}(|1/2|, |-1/2 \otimes \epsilon | |^s) \\ \downarrow A_{SO_4} & & \downarrow A_{w, SO_4} \\ \text{Ind}_{GL_2}^{SO_4}(St \otimes \epsilon | |^{-s}) & \hookrightarrow & \text{Ind}_B^{SO_4}(|1/2|, |-1/2 \otimes \epsilon | |^{-s}) \end{array}$$

Le sous-groupe  $B$  est maintenant le sous-groupe de Borel habituel du groupe  $SO_4$ . Par ailleurs, on sait que  $SL_2 \times SL_2 / \pm 1 \simeq SO_4 \supset GL_2 \simeq SL_2 \times \mathbb{G}_m / \pm 1$ . De manière que l'on est ramené à l'opérateur d'entrelacement

$$Ind_{\mathcal{B}}^{PGL_2}(\epsilon | \cdot|^s) \rightarrow Ind_{B_2}^{PGL_2}$$

où  $\mathcal{B}$  est le sous-groupe de Borel de  $PGL_2$ . Le gain est que maintenant on est dans les conditions de Langlands et on sait que cet opérateur a un pôle puisque il est associé à quotient de fonctions  $L$  du type

$$\frac{L(\epsilon^2, 2s)}{L(\epsilon^2, 2s+1)}$$

avec  $\epsilon^2 = 1$ , qui a un pôle. Puisque l'opérateur  $A$  coïncide, sur le vecteur sphérique avec l'opérateur  $A_{w_0}$ , on en déduit qu'il a un pôle et donc que l'induite de  $St$  est irréductible. Grâce au résultat d'Aubert, on voit enfin que  $\pi = Ind_{GL_n}^{SO_{2n}}(\epsilon \circ det)$  est irréductible.

**Remarque 7.2.1.** On a le même résultat dans le cas réel pour des paramètres non ramifiés.

Ces calculs nous permettent donc conclure :

**Proposition 7.2.2.** *La représentation locale  $Ind_{GL_n}^{SO_{2n}}(\chi)$  (avec  $\chi$  unitaire ou bien  $\chi = |\cdot|^s$ ,  $s$  réel et petit) associée aux paramètres du type  $\chi \otimes sp_n$  du groupe déployé  $SO_{2n}$  est irréductible.*





---

# Résultats globaux

Le but de ce chapitre est de montrer les conséquences globales des conjectures d'Arthur pour le groupe  $SO_{2n}$ . On va maintenir la notation des chapitres 6 et 7. On pose  $\mathbf{G} = SO_{2n}$  et  $\mathbf{G}_{2n} = GL_{2n}$ . Comme avant tous ces groupes sont définis sur  $\mathbb{Q}$  et on dénote  $\mathbb{Q}_v$  la complétion de  $\mathbb{Q}$  en la place  $v$ .

## 8.1 Description des objets

Le groupe  $\mathbf{G} = SO_{2n} \in \mathcal{E}_{\text{prim}}(\mathbf{G}_{2n})$  est un groupe endoscopique elliptique tordu de  $\mathbf{G}_{2n}$  (cf. chapitre 7 pour les définitions). Remarquons que dans le cas global on a les définitions analogues des groupes  $S_\psi$ ,  $S_\psi$  et  $\mathcal{L}_\psi$ , une fois que l'on a fixé un paramètre  $\psi$  global. Calculons le groupe  $S_\psi$  dans le cas global. Rappelons que

$$S_\psi = \text{Cent}_{SO_{2n}(\mathbb{C})}(\psi(L_\psi \times SL_2(\mathbb{C}))) \quad (8.1)$$

On va calculer ces groupes associés au paramètre  $\psi = r_2 \otimes sp_n$  ( $r_2$  est une représentation irréductible de degré 2). On fera d'abord le calcul du centralisateur pour  $GL_{2n}(\mathbb{C})$  et puis on fera le calcul dans  $SO_{2n}(\mathbb{C})$ . Puisque  $r_2$  et  $sp_n$  sont des représentations irréductibles, leur produit tensoriel (externe) l'est de même. D'après le lemme de Schur on a

$$\text{Cent}_{GL_{2n}(\mathbb{C})}(\psi(L_\psi \times SL_2(\mathbb{C}))) = \mathbb{C}^\times$$

et par conséquent

$$S_\psi = \text{Cent}_{SO_{2n}(\mathbb{C})}(\psi(L_\psi \times SL_2(\mathbb{C}))) = \{\pm 1\}$$

Une fois fait ce calcul, on remarque aussitôt que le groupe quotient

$$\mathcal{S}_\psi = S_\psi / S_\psi^\circ Z(\widehat{G})^\Gamma = \{1\}$$

puisque  $S_\psi^\circ Z(\widehat{G})^\Gamma = \{\pm 1\}$ . Le théorème principal 30.2 d'Arthur [Art05] affirme que dans le cas de  $\mathbf{G} \in \mathcal{E}_{\text{prim}}(\mathbf{G}_{2n})$ . Alors on a

1. Pour  $\psi \in \widetilde{\Psi}(\mathbf{G})$  (paramètre global), si  $v$  est une valuation arbitraire de  $\mathbb{Q}$ , la localisation  $\psi_v$  de  $\psi$ , définie d'une manière évidente est un élément dans l'ensemble  $\widetilde{\Psi}(\mathbf{G}_v)$ . De plus, on a que  $\mathcal{L}_{\psi_v}$  est contenu dans  $\mathcal{L}_\psi$ , et que  $S_\psi(\mathbf{G})$  est contenu dans  $S_{\psi_v}(\mathbf{G}_v)$ . Il y a un homomorphisme canonique  $s \mapsto s_v$ . On peut donc définir un paquet global

$$\widetilde{\Pi}_\psi = \left\{ \bigotimes_v \pi_v \mid \pi_v \in \widetilde{\Pi}_{\psi_v}, \langle \cdot, \pi_v \rangle = 1 \text{ pour presque tout } v \right\}$$

et pour chaque élément  $\pi = \otimes_v \pi_v \in \widetilde{\Pi}_\psi$  un caractère

$$\langle s, \pi \rangle = \prod_v \langle s_v, \pi_v \rangle \quad s \in S_\psi$$

2. Si l'on définit une sous-algèbre de  $\widetilde{\mathcal{H}}(\mathbf{G})$  en prenant le produit tensoriel restreint

$$\widetilde{\mathcal{H}}(\mathbf{G}) = \bigotimes_v \widetilde{\mathcal{H}}(\mathbf{G}_v)$$

Alors il existe un isomorphisme de  $\widetilde{\mathcal{H}}(\mathbf{G})$ -modules (voir [Art05], page 247)

$$L_{\text{disc}}^2(\mathbf{G}(\mathbb{Q}) \backslash \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})) = L_{\text{disc}}^2(SO_{2n}(\mathbb{Q}) \backslash SO_{2n}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})) \simeq \bigoplus_{\psi \in \widetilde{\Psi}_2} 2 \left( \bigotimes_{\pi \in \mathcal{B}_\psi} \pi \right) \quad (8.2)$$

où  $\mathcal{B}_\psi$  est l'ensemble

$$\mathcal{B}_\psi = \{ \pi \in \widetilde{\Pi}_\psi \mid \langle \cdot, \pi \rangle = \epsilon_\psi \}$$

et  $\Psi_2$  dénote les paramètres discrets de carré intégrable et  $\epsilon_\psi : S_\psi \rightarrow \{\pm 1\}$  est un caractère linéaire défini en termes de nombres de racines symplectiques.

**Remarque 8.1.1.** Le coefficient 2 qui apparaît dans l'isomorphisme (8.2) est le nombre de  $\widehat{\mathbf{G}}$ -orbites de plongements

$$\mathcal{L}_\psi \times SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L \mathbf{G}.$$

Pour des autres groupes classiques ce coefficient, que l'on note  $m$ , satisfait  $m \leq 2$  (voir page 247 dans [Art05]).

On peut énoncer les conséquences globales dans le cas non ramifié partout.

## 8.2 Cas partout non ramifié

Considérons notre paramètre fixé (cf. chapitre 2)  $\psi \in \tilde{\Psi}_2(\mathbf{G})$  : c'est un paramètre global de  $\mathbf{G}$  de carré intégrable. On pose  $\psi_\infty$  la composante archimédienne et soit  $f \in \tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{G})$ , une fonction partout non ramifiée. Pour cette fonction  $f$  on a aussi une décomposition  $f = (f_\infty, f_p)$ , où les  $f_p$  seront non ramifiées. Si on considère le calcul de la trace pour  $f$  on trouve, d'après l'énoncé 2 ci-dessus :

$$\text{trace}(f|L_{\psi_\infty}^2) = \sum_{\substack{\pi \in L_{\text{disc}}^2 \\ \omega_\pi = \omega_{\psi_\infty}}} \text{trace } \pi(f) = \sum_{\substack{\psi' \neq \psi \\ \psi'_\infty = \psi_\infty}} m_{\psi'} \bigotimes_{\pi \in \mathcal{B}_{\psi'}} \pi_v + 2 \prod_v \text{trace}(\otimes \pi_v)(f)$$

On peut considérer un ensemble fini  $S$  de places et  $f_S$  une fonction associée à cet ensemble  $S$ . On constate, en faisant varier  $f_S$ , puis  $S$ , que tous les termes précédents sont linéairement indépendants du dernier. Ceci implique que la trace est simplement :

$$\text{trace}(f|L_{\psi_\infty, \psi_S}^2) = 2 \prod_v \text{trace}(\otimes \pi_v)(f)$$

Soit  $\pi$  la représentation résiduelle de  $\mathbf{G}$ , de multiplicité 1 dans  $L_{\psi_\infty}^2$ , construite au chapitre 2 et  $\pi' = \pi^\alpha$  sa transformée par l'automorphisme extérieur de  $\mathbf{G}$ . Par transport de structure,  $\pi'$  est résiduelle, avec multiplicité 1, dans  $\mathbf{G}$  et distincte de  $\pi$  car associée à des séries d'Eisenstein sur le parabolique  $P^\alpha \neq P$  (théorème de disjonction de Langlands). En plus, on sait que localement les matrices de Hecke des deux représentations sont différentes (cf. observation 6.1.4). Par conséquent

$$\begin{aligned} \text{trace}(f|L_{\psi_\infty, \psi_S}^2) &= \sum_{\substack{\pi \in L_{\text{disc}}^2 \\ \text{de type } \psi_\infty, \psi_S}} \text{trace } \pi(f) = \text{trace } \pi(f) + \text{trace } \pi'(f) + \sum' \text{trace } \rho(f) \\ &= 2 \prod_v \text{trace } \pi(f) \end{aligned}$$

où  $\rho$  parcourt, éventuellement, les autres représentations de  $\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{G})$  correspondant au spectre de type  $\psi$ .

Puisque  $\text{trace } \pi = \text{trace } \pi'$ , sur  $\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{G})$ , l'identité précédente, vraie pour toutes les fonctions non ramifiées, implique que la somme  $\sum'$  est vide. Donc

**Théorème 8.2.1.** *Supposons les résultats locaux et globaux d'Arthur, dans le chapitre 30 [Art05]. Il existe seulement deux représentations de type  $\psi$  (pour notre paramètre  $\psi$  fixé) dans l'espace  $L^2(SO_{2n}(\mathbb{Q}) \backslash SO_{2n}(\mathbb{A}))$ . Ce sont les représentations résiduelles  $\pi$  et  $\pi' = \pi^\alpha$  où  $\alpha$  est l'automorphisme extérieur de  $SO_{2n}$ . En particulier, il n'existe pas de représentation cuspidale de  $SO_{2n}(\mathbb{A})$  de type  $\psi$ .*

Nous pouvons enfin améliorer les estimées des valeurs propres des opérateurs de Hecke données dans le chapitre 6. D'après ces estimées, on peut déduire enfin le théorème suivant :

**Théorème 8.2.2.** *Soit  $\pi$  une représentation cuspidale, partout non ramifiée de  $SO_{2n}(\mathbb{A})$ . Notons  $\pi_v$  ses facteurs locaux. Supposons vérifiées les conjectures d'Arthur pour  $SO_{2n}$ , i.e. les résultats annoncés dans [Art05], chapitre 30. Alors*

1. *La matrice de Hecke  $t_{\pi_v} = \text{diag}(t_1, \dots, t_n, t_n^{-1}, \dots, t_1^{-1})$  de  $\pi_v$  (la composante locale), vérifie en toute place  $v$  les estimées*

$$|t_i^{\pm 1}| \leq p^{\frac{n}{2} - 1 + \epsilon(n)}$$

2. *A la place archimédienne, on a de même*

$$\pi_\infty \hookrightarrow \text{ind}_{B_G}^G(\chi_1, \dots, \chi_n) \quad (\text{sous-quotient})$$

*où  $\chi_i : \mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ , vérifie  $\chi(x) = |x|^{s_i}$ ,  $|s_i| \leq \frac{n}{2} - 1 + \epsilon(n)$ . On a donc le même type de majorations que pour les places finies.*

Terminons en remarquant que l'on ne s'est limité au cas du corps  $\mathbb{Q}$  que pour simplifier les notations. Les théorèmes précédents sous les mêmes hypothèses, s'étendent donc à tout corps de nombres  $F$ .



---

## Bibliographie

- [Art89] J. ARTHUR, Unipotent automorphic representations :conjectures, dans *Orbites Unipotentes et Représentations II : Groupes  $p$ -adiques et réels*, Astérisque, 171-172, 1989.
- [Art83] J. ARTHUR, On some problems suggested by the trace formula, dans *Lie Group Representations II*, Proceedings, University of Maryland 1982-1983, Herb, Kudla, Lipsman and Rosenberg eds, Springer Lecture Notes **1041**.
- [Art05] J. ARTHUR, An introduction to the trace formula, dans Kottwitz, Robert E. Arthur, James (ed.) et al., *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*. Proceedings of the Clay Mathematics Institute 2003 summer school, Toronto, Canada, June 2–27, 2003. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS). Clay Mathematics Proceedings 4, 393-522 (2005).
- [A-C89] J. ARTHUR, L. CLOZEL, *Simple Algebras, Base Change and the Advanced Theory of the Trace Formula*, Princeton University Press, Princeton, 1989.
- [Aub95] A.M. AUBERT, Dualité dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie d'un groupe réductif  $p$ -adique. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **347** (1995), no. 6, 2179–2189.
- [Ber84] I. N. BERSTEIN,  $P$ -invariant distributions of  $GL(n)$ , dans *Lie Group Representations II*, Lecture Notes in Math. **1041**, Springer, New York, 1984, 50-112.
- [BZ77] I. N. BERSTEIN, A. V. ZELEVINSKY, Induced Representations of Reductive  $p$ -Adic Groups I, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4<sup>e</sup> serie, **10**, 1977, 441-472.

- [BZ76] I. N. BERSTEIN, A. V. ZELEVINSKY, Representations of the group  $GL(n, F)$ , where  $F$  is a local non-archimedean Field *Uspekhi. Mat. Nauk.*, **31**, 3, 1976, 5-70 (en russe).
- [Bor79] A. BOREL, Automorphic  $L$ -functions, *Proc. Sympos. Pure Math.*, AMS, **33**, II, 1979.
- [B-W99] A. BOREL, N. WALLACH, *Continuous Cohomology, Discrete Subgroups and Representations of Reductive Groups*, Mathematical Surveys and Monographs, vol 67, A.M.S, 1999.
- [Bou68] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, chapitres 4, 5, 6, Hermann 1968.
- [B-S91] M. BURGER, P. SARNAK Ramanujan duals II, *Invent. Math.*, **106**, no. 1, p. 1-11, 1991.
- [BLS92] M. BURGER, J.S. LIE, P. SARNAK Ramanujan duals and automorphic spectrum, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **26**, no. 4, p. 869-930, 1992.
- [Car79] P. CARTIER, Representations of  $p$ -adic groups. A survey, *Proc. Sympos. Pure Math.*, AMS, **33**, II, 1979.
- [Cas] W. CASSELMAN, Introduction to the theory of admissible representations of  $p$ -adic reductive groups, preprint.
- [Clo07] L. CLOZEL, Spectral Theory of Automorphic Forms. Automorphic Forms and Applications, 43-93. *IAS/Park City Math. Ser.*, **12**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [Clo84] L. CLOZEL, Théorème d'Atiyah-Bott pour les variétés  $p$ -adiques et caractères des groupes réductifs. *Mémoires de la Société Mathématique de France Sér. 2*, **15**, 1984, p. 39-64
- [C-C] L. CLOZEL, G. CHENEVIER, Corps de nombres peu ramifiés et formes automorphes autoduales.
- [C-U04] L. CLOZEL, E. ULLMO, Équidistribution des points de Hecke. *Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory*, 193–254, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004.
- [vDj72] G. VAN DIJK, Computation de certain induced characters of  $p$ -adique groupes, *Math. Ann.*, **199**, 1972, 229-240.
- [Dix69] J. DIXMIER, *Les  $C^*$ -algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [DHL92] W. DUKE, R. HOWE AND J.-S. LI, Estimating Hecke Eigenvalues of Siegel Modular Forms *Duke Math. J.*, **6** (1992), 219-240.
- [Fla79] D. FLATH Decomposition of representations into tensor products, *Proc. Sympos. Pure Math.*, AMS, **33**, II, 1979.
- [G-S88] S. GELBART, F. SHAHIDI, *Analytic Properties of Automorphic  $L$ -functions*, Perspectives in Mathematics, vol 6. Academic Press, Inc, 1988.
- [God67] R. GODEMENT, Introduction a la théorie de Langlands, *Séminaire Bourbaki*, exposée 321, 1967.

## Bibliographie

---

- [How84] R. HOWE, Automorphic forms of low rank, dans *Non-Commutative Harmonic Analysis*, Lecture Notes in Math. **1041**, Springer, New York, 1984, 50-112.
- [J-S81] H. JACQUET, J. SHALIKA, On Euler products and the classification of automorphic representations II, *Amer. J. Math.*, **103**, 1981, 777-815.
- [Kat82] S.I. KATO, Irreducibility of principal series representations for Hecke algebras of affine type, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **28**, 929-944, 1982.
- [KSS03] H.H. KIM, Functoriality for the exterior square of  $GL_4$  and the symmetric fourth of  $GL_2$ , *J. Amer. Math. Soc.*, **16** (2003), no. 1, p. 139-183, With appendix 1 by Dinakar Ramakrishnan and appendix 2 by Kim and Sarnak.
- [Kna01] A. KNAPP, *Representation Theory of Semisimple groups*. An overview based on examples, Reprint of the 1986 original. Third printing, and first Princeton Landmarks in Mathematics edition, 2001.
- [Kot84] R.E. KOTTWITZ, Shimura varieties and twisted orbital integrals, *Math. Ann.*, **269**, 287-300, 1984.
- [K-S99] R.E. KOTTWITZ, D. SHELSTAD, Foundations of twisted endoscopy, *Astérisque*, **255**, 1999.
- [Lab90] J.P. LABESSE, Fonctions élémentaires et lemme fondamental pour le changement de base stable *Duke Math J.*, **61**, 519-530, 1990.
- [Lab84] J.P. LABESSE, Cohomologie,  $L$ -groupes et functorialité, *Compositio Math. J.*, **49**, 163-184, 1984.
- [Lan71] R.P. LANGLANDS, *Euler products*, Yale University Press, New Haven, 1971.
- [Lan76] R.P. LANGLANDS, *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Lecture Notes in Mathematics, vol 544, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.
- [Lan79] R.P. LANGLANDS, Stable conjugacy : definition and lemmas, *Can. J. Math.*, **31**, 1979, p. 700-725.
- [L-S87] R.P. LANGLANDS, D. SHELSTAD, On the definition of transfer factors, *Math. Ann.*, **278**, 1987, 219-271.
- [Li89] J.-S. LI, Singular Unitary Representations of Classical Groups, *Invent. Math.*, **97** (1989), 237-255.
- [Lip74] R. LIPSMAN, *Group Representations*, Lecture Notes in Mathematics, **388**, Springer-Verlag, 1974.
- [Mac78] G.W. MACKEY, *Unitary Group Representations in Physics, Probability and Number Theory*, The Benjamin/Cumming Publishing Company Inc, 1978.
- [M-W95] C. MOEGLIN ET J.L. WALDSPURGER, *Spectral Décomposition and Eisenstein Series*, Cambridge Tracts in Mathematics 113, Cambridge University Press, 1995.

- [M-W89] C. MOEGLIN ET J.L. WALDSPURGER, Le spectre résiduel de  $GL(n)$   
*Ann. Scient. Éc. Norm. Sup*, 4 série, **22**, 1989, 605-674.
- [Sil78] A.J. SILBERGER, The Langlands quotient theorem for  $p$ -adic groups,  
*Math. Ann.*, **263**, 1978.
- [Sha81] F. SHAHIDI, On certain  $L$ -functions, *Amer. J. Math*, **103**, 1981.
- [Wal03] J.L. WALDSPURGER, La formule de Plancherel pour les groupes  $p$ -  
adiques. D'après Harish-Chandra, *J. Inst. Math. Jussieu*, No.2, 235-333  
(2003).
- [Wal07] J.L. WALDSPURGER, Le groupe  $GL_N$  tordu, sur un corps  $p$ -adique. I.,  
*Duke Math. J.* **137**, No. 2, 185-234 (2007).