Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg



ANALYSE FONCTIONNELLE

Claude Portenier

Semestre d'hiver 2000/2001

Version du 31 mars 2001

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES ii

INDEX v

1 ESPACES LOCALEMENT CONVEXES 1

1.1 Semi-normes 2

1.2 Espaces polynormés 7

1.3 Espaces localement convexes 11

1.4 Produit de deux espaces localement convexes 15

1.5 Convergence 18

1.6 Espaces de dimension finie 21

1.7 Espaces quotients et sous-espaces 23

1.8 Théorème de Riesz 25

1.9 Espaces localement convexes finaux 26

1.10 Espaces de Fréchet 30

1.11 Espaces tonnelés 33

1.12 Produits tensoriels 34

2 SEMI-DUALITÉ 40

2.1 Espaces d'applications linéaires 41

2.2 Espaces normés d'applications linéaires . . . 44
2.3 Opérateurs à noyaux dans $\mathcal{C}^b$ . . . 46
2.4 Dualité et semi-dualité . . . 49
2.5 Applications linéaires de rang fini . . . 58
2.6 Théorème de Hahn-Banach . . . 61
2.7 Continuité faible et adjonction . . . 67
2.8 Dualité dans les espaces normés . . . 71
2.9 Dualité de Fenchel . . . 73
2.10 Polarité et orthogonalité . . . 80
2.11 La topologie de Mackey . . . 84
2.12 Intégration vectorielle faible . . . 86
2.13 Applications linéaires et produits tensoriels . . . 92
2.14 Les théorèmes du graphe fermé et d'isomorphie . . . 95
2.15 Quelques applications du théorème du graphe fermé . . . 101
2.16 La topologie forte . . . 104
Les topologies de la convergence uniforme . . . 105

3 Espaces de Hilbert **106**

3.1 Formes sesquilinéaires et produits scalaires . . . 107
3.2 Espaces préhilbertiens et espaces de Hilbert . . . 110
3.3 Formules de polarisation . . . 112
3.4 Théorème de la projection . . . 114
3.5 Théorème de représentation de Riesz . . . 118
3.6 Sommes hilbertiennes . . . 122
3.7 Bases hilbertiennes . . . 126
3.8 Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt . . . 129
3.9 Polynômes orthogonaux . . . 130
Relation de récurrence . . . 131
Polynômes classiques . . . 132
Formule de Rodrigues . . . 133

Equation différentielle 134
Polynômes de Jacobi spéciaux 137
Fonction génératrice 138
3.10 Densité dans et appartenance à un espace $\mathbf{L}^2$ 141
3.11 Opérateurs dans un espace de Hilbert 146
Les opérateurs intégraux de Hilbert-Schmidt 148
Les opérateurs intégraux faiblement singuliers 149

4 ESPACES DE DISTRIBUTIONS 152

4.1 Une manière d'interpréter la notion de dualité 153
Exemple physique 153
Exemple économique 154
4.2 Les intégrales de Radon comme fonctions généralisées 156
4.3 Les distributions 160
4.4 Dérivation 166
4.5 Multiplication 171
4.6 Translation 174
4.7 Dilatation 177
4.8 Opérations et leurs liaisons dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ 180
4.9 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 183
4.10 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ 188
4.11 Espaces de Sobolev 191
4.12 Convolution des fonctions et des distributions 194

INDEX

Version du 31 mars 2001

absolu
—ment convergente, 19
—ment symétrique, 77
fonctionnelle —ment homogène, 2
valeur —e d'une intégrale de Radon, 55
adjoint
admettre une —e, 67
algébrique
dual, semi-dual —, 43
application
adjointe, 67
canonique
d'un espace quotient, 23
du produit tensoriel, 35
auto-adjoint
formellement —, 167

Baire
théorème de —, 30
Banach
théorème de — -Steinhaus, 42, 45
base
canonique de $\mathbb{K}^{(X)}$, 28
bidual, 71
bilinéaire, 16
biorthogonal, 53
borné
intégrale de Radon —e, 159
partie —e, 42
topologie de la convergence —e, 44
boule
fermée, ouverte, 7
bra, 34
vecteur —, 50

canonique
application —
d'un espace quotient, 23
du produit tensoriel, 35
base — de $\mathbb{K}^{(X)}$, 28
Cauchy
critère de —, 19
suite de —, 19
compact
topologie de la convergence —e (de toutes les dérivées), 12
compatible
avec une semi-dualité, 54
complet
séquentiellement —, 19
complété, 71
complexe
intégrale de Radon —, 55
conjugué
fonction —e, 75
inéegrale de Radon —e, 55
convergence
topolgie de la — compacte de toutes les dérivées, 12
topologie de la — bornée, 44
topologie de la — simple, compacte, 12
convergent
série (absolument) —e, 19
convexe, 73
espace localement —, 11
critère
de Cauchy, de Weierstraß, 19

déclinante
fonction —, 4
décroissance
fonction à — rapide, 4
dense
séquentiellement —, 20
dérivée
d'une distribution, 166
Dirac
fonction de —, 168
formalisme de —, 34
direct
produit —, 15
somme —e (externe), 28
distribution, 160
temperée, 162
dual
algébrique, topologique, faible, 43

bi—, 71
fort, 44
dualité, 49

élémentaire
tenseur —, 35
ensemble
polaire, orthogonal, 80
équivalent
espaces polynormés —s, 11
espace
—s polynormés équivalents, 11
Fréchet, 30
de Schwartz, 4, 12
localement convexe, 11
final, 26
quotient, 23
tonnelé, 33
polynormé, 7
semi-normé, normé, 2
évaluation
forme linéaire d'—, 2

faible
intégrale —, 86
topologie —, 49
topologie, dual, semi-dual —, 43
Fenchel
théorème de —, 155
transformation de Legendre- —, 75
fermé
boule —e, 7
final
espace localement convexe —, 26
fini
application linéaire de rang —, 58
fonction
—s généralisées, 157
à croissance moderée, lente, 164
à décroissance rapide, déclinante, 4
conjuguée, 75
de Dirac, 168
de Heaviside, 158
généralisée, 160
fonctionnelle
sous-linéaire, positivement homogène, sous-additive, absolument homogène, séparante, 2
formalisme
de Dirac, 34
forme
sous-linéaire, 2
fort
dual —, 44
topologie —e, 104
Fréchet
espace de —, 30
Fredholm
opérateur de —, 46

graphe
sur—, 73

Heaviside
fonction de —, 158
Hölder
inégalité de — abstraite, 50
homogène
fonctionnelle positivement, absolument —, 2

imaginaire
partie — d'une intégrale de Radon, 55
inductif
produit tensoriel topologique —, 35
inégalité
de Hölder abstraite, 50
intégrable
(au sens de Pettis), 88
scalairement —, 86
intégral
opérateur —, 46
intégrale
de Radon à croissance moderée, 163
de Radon bornée, 159
de Radon positive, réelle, complexe, conjuguée, 54
faible, 86
involution, 50
isométrie, 21
isomorphe, 21

jauge
de Minkowsky, 80

ket, 34
vecteur —, 50

Legendre
transformation de — -Fenchel, 75
lent

fonction à croissance —e, 164
linéaire
semi- —, 10
localement
espace — convexe, 11

Mackey
topologie, semi-norme de —, 84
majoration
théorème de la — uniforme, 42, 44
mesurable
scalairement —, 86
Minkowsky
jauge de —, 80
modéré
intégrale de Radon, fonction à croissance —e, 163

négligeable
scalairement —, 86
normable, 11
norme, 2
noyau, 46, 59
opérateur à —, 46

opérateur
intégral, à noyau, de Fredholm, 46
orthogonal
ensemble —, 80
ouvert
boule, partie —e, 7

partie
réelle, imaginaire d'une intégrale de Radon, 55
Pettis
intégrable au sens de —, 88
poids
sous-multiplicatif, 4
polaire
ensemble —, 80
polynormé
espace —, 7
positif
intégrale de Radon —ve, 54
positivement
fonctionnelle — homogène, 2
problème
de régularité, 163
produit
(direct), 15
tensoriel (topologique inductif), 35

quotient
espace localement —, 23

rang
application linéaire de — fini, 58
rapide
fonction à décroissance —, 4
réel
intégrale de Radon —le, 55
partie —le d'une intégrale de Radon, 55
réflexif, 71
régularité
problème de —, 163
Riesz
théorème de —, 25

saturé, 10
scalairement
intégrable, négligeable, mesurable, 86
Schwartz
espace de —, 4, 12
semi
— -dual
algébrique, topologique, faible, 43
semi-
dualité, 49
linéaire, 10
normable, 11
norme, 2
semi-norme
de Mackey, 84
séparant
(semi-)dualité —e, 50
séparante
fonctionnelle —, 2
séparé
fonctions à variables —es, 38
noyau à variables —es, 59
séquentiellement
complet, 19
dense, 20
sesquilinéaire
à gauche, à droite, 16
simple
partie —ment bornée, 42
topologie de la convergence —, 12

somme
  d'une série, 19
  directe (externe), 28
sous-additive
  fonctionnelle —, 2
sous-linéaire
  fonctionnelle —, 2
sous-multiplicatif
  poids —, 4
Steinhaus
  théorème de Banach- —, 42, 45
suite
  de Cauchy, 19
surgraphe, 73
symétrique
  absolument —, 77

tempéré
  distribution —e, 162
tenseur, 35
tensoriel
  produit — (topologique inductif), 35
théorème
  de Baire, 30
  de Banach-Steinhaus, 42, 45
  de Fenchel, 155
  de la majoration uniforme, 42, 44
  de Riesz, 25
tonnelé
  espace localement convexe —, 33
topologie
  associée, définie par $\mathcal{P}$, 7
  compatible avec une semi-dualité, 54
  de la convergence bornée, 44
  de la convergence compacte de toutes les dérivées, 12
  de la convergence simple, compacte, 12
  de Mackey, 84
  faible, 43, 49
  forte, 104
topologique
  dual, semi-dual —, 43
total, 83
transformation
  de Legendre-Fenchel, 75

uniforme
  théorème de la majoration —, 42, 44
universel
  problème —
    pour les applications bilinéaires, 34
  propriété —le
    pour la topologie localement convexe finale, 26

valeur
  absolue d'une intégrale de Radon, 55
variable
  fonctions à —s séparées, 38
  noyau à —s séparées, 59
vecteur
  bra, ket, 50

Weierstraß
  critère de —, 19