Chapitre 2

ANALYSE HARMONIQUE SUR UN MONOÏDE DISCRET

Version du 18 février 2007

2.1 Monoïdes, caractères et fonctions exponentielles

DÉFINITION 1 Rappelons qu'un *monoïde* est un ensemble G muni d'une loi de composition associative notée multiplicativement

$$m : G \times G \longrightarrow G : (s,t) \longrightarrow st = s \cdot t \ .$$

Il est dit *unifère* s'il possède un *élément neutre* , noté e , satisfaisant à $se = es = s$ pour tout $s \in G$.

Pour tout $s \in G$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on peut définir

$$s^k := \prod_{j \in k} s := \underbrace{s \cdot \ldots \cdot s}_{k\text{-fois}} \ .$$

Si G possède un élément neutre e , on a $s^0 = \prod_{j \in \emptyset} s = e$.

Si cette loi est commutative on la note additivement et l'élément neutre est noté 0 . Dans ce cas on a

$$k \cdot s := \sum_{j \in k} s := \underbrace{s + \ldots + s}_{k\text{-fois}}$$

et $0 \cdot s = 0$.

Nous dirons qu'une application $s \longmapsto s^* : G \longrightarrow G$ est une *involution* si, pour tout $s,t \in G$, on a

$$(st)^* = t^* s^* \qquad \text{et} \qquad (s^*)^* = s$$

et que G est *involutif* s'il est muni d'une involution.

REMARQUE 1 Tout monoïde peut être muni d'une involution en considérant l'application identique id_G ! Si rien n'est précisé c'est celle que nous considérerons.

Un groupe G peut être muni de deux involutions : id_G et $\mathrm{id}_G^{-1} : s \longmapsto s^{-1}$.

REMARQUE 2 L'élément neutre, s'il existe est univoquement déterminé et on a $e^* = e$.

En effet si e' est un autre élément neutre on peut écrire

$$e' \underset{e \text{ neutre}}{=} e'e \underset{e' \text{ neutre}}{=} e$$

et

$$e^* = e^* e = e^* e^{**} = (e^* e)^* = e^{**} = e \ .$$

□

DÉFINITION 2 On dit que $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ est un *caractère* de G si $\chi \neq 0$ et si, pour tout $s, t \in G$, on a

$$\chi(st) = \chi(s) \cdot \chi(t) \ .$$

Il est dit *hermitien* si, pour tout $s \in G$, on a

$$\chi(s^*) = \overline{\chi(s)} \ .$$

Il est dit *borné* si

$$\sup |\chi(G)| < \infty \ .$$

REMARQUE 3 Si χ est un caractère, alors $\chi(e) = 1$. S'il est borné, on a $|\chi| \leqslant 1$.

Mais attention on peut avoir $\chi(s) = 0$ pour certains $s \in G \setminus \{e\}$, comme le montre les exemples qui suivent !

En effet si $\chi(e) = 0$, on a

$$\chi(s) = \chi(es) = \chi(e) \cdot \chi(s) = 0 \ ,$$

donc $\chi = 0$, ce qui est absurde. Mais alors

$$\chi(e) = \chi\left(e^2\right) = \chi(e)^2 \ ,$$

donc $\chi(e) = 1$.

D'autre part si $|\chi(s)| > 1$ pour un certains $s \in G$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\chi\left(s^k\right)\right| = |\chi(s)|^k \to \infty \ ,$$

donc χ n'est pas borné. □

DÉFINITION 3 On désigne par $\mathrm{Sp}\, G$, $\mathrm{Sp}^h\, G$ et $\mathrm{Sp}^b\, G$ respectivement l'ensemble des caractères, des caractères hermitiens et des caractères hermitiens et bornés de G . On dit que $\mathrm{Sp}\, G$ est le *spectre* , $\mathrm{Sp}^h\, G$ le *dual* et $\mathrm{Sp}^b\, G$ le *dual restreint* de G .

Le dual de (G, id_G) est formé des caractères réels de G , on dit que ce sont des *fonctions exponentielles* ; nous le noterons $\mathcal{EXP}(G)$. Le dual restreint de (G, id_G) est formé des fonctions exponentielles bornées et elles sont à valeurs dans $[-1, 1]$; il sera noté $\mathcal{EXP}^b(G)$, tandis que $\mathcal{EXP}^b_+(G)$ désigne l'ensemble des fonctions exponentielles à valeurs dans $[0, 1]$.

Tous ces ensembles seront muni de la topologie de la convergence ponctuelle sur G , donc induite par $\mathbb{K}^G$.

REMARQUE 4 Si χ et θ sont des caractères (resp. hermitiens ou bornés), alors le produit (ponctuel) $\chi \cdot \theta$ et $\overline{\chi}$ est un caractère (resp. hermitien ou borné). Muni de l'involution $\chi \longmapsto \overline{\chi}$, $\mathrm{Sp}\, G$ est un monoïde involutif commutatif. Il en est de même des sous-monoïdes $\mathrm{Sp}^h\, G$ et $\mathrm{Sp}^b\, G$. Ces trois parties sont fermées dans $\mathbb{K}^G$.

Les premières assertions se vérifient immédiatement. $\mathrm{Sp}\, G$ et $\mathrm{Sp}^h\, G$ sont fermées car définies par des conditions ponctuelles. Puisque $\mathrm{Sp}^b\, G = \mathrm{Sp}^h\, G \cap \mathbb{B}_1^G$, où $\mathbb{B}_1$ désigne la boule unité de $\mathbb{K}$, $\mathrm{Sp}^b\, G$ est aussi fermée. □

REMARQUE 5 Si G est un groupe et $D(G)$ désigne le groupe des commutateurs de G , alors tout caractère est égal à 1 sur $D(G)$. Ainsi l'ensemble des caractères de G s'identifie à ceux du groupe commutatif $G/D(G)$!

Attention une fonction exponentielle peut prendre des valeurs négatives comme le montre l'exemple de la proposition 1 et celui à la fin de ce paragraphe.

REMARQUE 6 Si tout élément de G est un carré, i.e. pour tout $s \in G$, il existe $t \in G$ tel que $s = t^2$, alors toute fonction exponentielle est positive, i.e. $\mathcal{EXP}^b(G) = \mathcal{EXP}^b_+(G)$.

En effet $\chi(s) = \chi(t^2) = \chi(t)^2 \in \mathbb{R}_+$ pour tout $s \in G$. $\square$

La notion "être un carré" n'a de sens qu'en notation multiplicative. Si G est noté additivement, donc est commutatif, on dit "être 2-*divisible* ", i.e. pour tout $s \in G$, il existe $t \in G$ tel que $s = 2 \cdot t = t + t$.

Pour plus de détails liés à l'analyse harmonique sur un monoïde on peut consulter le livre de Berg, Christensen et Ressel [BeChRe 1984]. Nous en profiterons largement dans ce qui suit.

REMARQUE 7 Rappelons que $0^0 = 1$ et $e^{-\infty} = 0$. En particulier

$$e^{-\infty \cdot s} = 0^s = 1_{\{0\}}(s) \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R}_+ .$$

PROPOSITION 1 $\mathbb{N}$ *est un monoïde commutatif pour l'addition. Il n'est pas* 2-*divisible et* $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ *est la seule involution.*

Tout caractère de $\mathbb{N}$ *est de la forme*

$$z^{\mathrm{id}} : k \longmapsto z^k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \textit{avec } z \in \mathbb{C}$$

et

$$r^{\mathrm{id}} : k \longmapsto r^k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textit{avec } r \in \mathbb{R}$$

sont les fonctions exponentielles sur $\mathbb{N}$ *. On a donc des bijections*

$$\diamond^{\mathrm{id}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{Sp}\,\mathbb{N}$$

et

$$\diamond^{\mathrm{id}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{EXP}(\mathbb{N}) = \mathrm{Sp}^h\,\mathbb{N}\,;$$

ce sont des homémorphismes.

Le dual restreint $\mathcal{EXP}^b(\mathbb{N}) = \mathrm{Sp}^b\,\mathbb{N}$ *est l'image de* $[-1, 1]$ *, tandis que* $\mathcal{EXP}^b_+(\mathbb{N})$ *peut être paramétré de deux manières différentes :*

$$\diamond^{\mathrm{id}} : r \longmapsto r^{\mathrm{id}} : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{EXP}^b_+(\mathbb{N})$$

et

$$e^{-\diamond \cdot \mathrm{id}} : \alpha \longmapsto e^{-\alpha \cdot \mathrm{id}} : \overline{\mathbb{R}}_+ \longrightarrow \mathcal{EXP}^b_+(\mathbb{N}) \ .$$

Ce sont des homéomorphismes.

On a $1^* \geqslant 1$, donc $1^* - 1$ appartient à $\mathbb{N}$ et $1^* = (1^* - 1) + 1$; ainsi $1 = 1^{**} = [(1^* - 1) + 1]^* = (1^* - 1)^* + 1^* \geqslant 1^*$, donc $1^* = 1$ et par suite $\diamond^* = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Une fonction de la forme z^{id} est évidemment un caractère. Réciproquement si χ est un caractère, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\chi(k) = \chi(1)^k$$

par récurrence, ce qui démontre la première partie. Pour que χ soit bornée, il faut et il suffit que $r \in [-1,1]$; si en plus $\chi \geqslant 0$, on a $r \in [0,1]$, donc $\alpha := -\ln r \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Il est clair si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ converge vers $z \in \mathbb{C}$, que z_n^{id} converge ponctuellement vers z^{id} et réciproquement, puisqu'il suffit d'évaluer en 1 . □

PROPOSITION 2 $\mathbb{R}_+$ *est un monoïde commutatif pour l'addition. Il est* 2*-divisible et* $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ *est la seule involution.*

Tout caractère continu en 0 *de* $\mathbb{R}_+$ *est de la forme*

$$e^{w\cdot\mathrm{id}} : s \longmapsto e^{w\cdot s} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C} \quad \textit{pour } w \in \mathbb{C}$$

et

$$e^{r\cdot\mathrm{id}} : s \longmapsto e^{r\cdot s} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textit{pour } r \in \mathbb{R}$$

sont les fonctions exponentielles continues sur $\mathbb{R}_+$ *.*

Celles qui sont continues et bornées s'écrivent

$$e^{-\alpha\cdot\mathrm{id}} : s \longmapsto e^{-\alpha\cdot s} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0,1] \quad \textit{avec } \alpha \in \mathbb{R}_+ \ .$$

La seule fonction exponentielle bornée qui n'est pas continue est $1_{\{0\}} = e^{-\infty\cdot\mathrm{id}} = 0^{\mathrm{id}}$ *.*

On a donc deux paramétrages

$$e^{-\diamond\cdot\,\mathrm{id}} : \alpha \longmapsto e^{-\alpha\cdot\mathrm{id}} : \overline{\mathbb{R}}_+ \longrightarrow \mathcal{EXP}^b(\mathbb{R}_+)$$

et

$$\diamond^{\mathrm{id}} : r \longmapsto r^{\mathrm{id}} : [0,1] \longrightarrow \mathcal{EXP}^b(\mathbb{R}_+) \ .$$

Ce sont des homéomorphismes.

Si $1^* \geqslant 1$, la démonstration est identique à celle que nous avons fait pour $\mathbb{N}$. Si $1 \geqslant 1^*$, on a de manière analogue $1 = (1-1^*) + 1^*$, donc $1^* = (1-1^*)^* + 1 \geqslant 1$. Une fonction de la forme $e^{w\cdot\mathrm{id}}$ est évidemment un caractère continu en 0 . Réciproquement si χ est un caractère continu en 0 , pour tout $s,t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\chi(s+t) - \chi(s) = \chi(s)\cdot[\chi(t) - 1]$$

ce qui montre que χ est continu à droite. Rappelons que $w \longmapsto e^w : \mathbb{R} + i\cdot\,]-\pi,\pi[\, \longrightarrow \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_-$ est un homéomorphisme ; comme $\lim_k \chi(2^{-k}) = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geqslant N$, on ait

$$\chi(2^{-k}) = e^{w_k} \quad \text{avec } w_k \in \mathbb{R} + i\cdot\,]-\pi,\pi[$$

et $\lim_k w_k = 0$. D'autre part

$$e^{2w_{k+1}} = \chi(2^{-k-1})^2 = \chi(2^{-k}) = e^{w_k} \ ,$$

donc $2w_{k+1} - w_k \in 2\pi i\cdot\mathbb{Z}$, et nous pouvons supposer, en choisissant N plus grand, que $2w_{k+1} = w_k$ pour tout $k \geqslant N$. Posons $w := 2^N \cdot w_N \in \mathbb{C}$. Ainsi

$$w_k = 2^{N-k}\cdot w_N = 2^{-k}\cdot w \quad \text{pour tout } k \geqslant N \ ,$$

et par suite

$$\chi(2^{-k}\cdot l) = \chi(2^{-k})^l = (e^{w_k})^l = e^{w\cdot 2^{-k}\cdot l} \quad \text{pour tout } k \geqslant N \text{ et } l \in \mathbb{N} \ .$$

Par la densité (à droite) de $\left\{2^{-k} \cdot l \mid k \geqslant N \text{ et } l \in \mathbb{N}\right\}$ dans $\mathbb{R}_+$ et la continuité à droite de χ , on obtient

$$\chi = e^{w \cdot \mathrm{id}} .$$

Il nous reste à prouver qu'une fonction exponentielle bornée, qui n'est pas continue en 0 , est égale à $1_{\{0\}}$. Mais puisque $\chi(t) \in [0,1]$ (cf. remarque 6), la formule

$$\chi(s+t) = \chi(s) \cdot \chi(t) \leqslant \chi(s) \quad \text{pour tout } s,t \in \mathbb{R}_+$$

montre qu'elle est décroisssante. Puisqu'elle n'est pas continue en 0 , on a $\chi(0+) < \chi(0) = 1$, et pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$, il vient

$$\chi(s) = \lim_k \chi\left(\frac{s}{k}\right)^k \leqslant \lim_k \chi(0+)^k = 0 ,$$

d'où le résultat. Il est clair que $e^{-\diamond \cdot \mathrm{id}}$ est continue et en évaluant en 1 , on voit facilement que l'aplication réciproque est aussi continue. □

REMARQUE 8 Si $(e_j)_{j \in J}$ est une base de Hamel du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$, toute forme $\mathbb{Q}$-linéaire ℓ sur $\mathbb{R}$, uniquement définie par ses valeurs sur $\Big(\ell(e_j)\Big)_{j \in J}$, définit une fonction exponentielle

$$\chi : s \longmapsto e^{\ell(s)} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^* .$$

Puisque $\mathbb{R}_+^*$ engendre le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$, nous pouvons supposer que $e_J \subset \mathbb{R}_+^*$. Puisque J a la puissance du continu, nous pouvons également supposer que $\ell(e_J) = \mathbb{R}$! Ainsi

$$\mathbb{R}_+^* \supset \chi(\mathbb{R}_+) \supset e^{\ell(e_J)} = e^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}_+^* ,$$

donc χ n'est pas bornée et χ n'est pas continue, car si $\ell = r \cdot \diamond$ pour un $r \in \mathbb{R}$, on aurait $\mathbb{R} = \ell(e_J) \subset r \cdot e_J \neq \mathbb{R}$!

Réciproquement toute fonction exponentielle $\chi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est positive, puisque $\mathbb{R}_+$ est 2-divisible (remarque 6), et si elle s'annule en un point $s \in \mathbb{R}_+^*$, elle s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$: en effet pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\chi\left(\frac{s}{k}\right)^k = \chi(s) = 0$, donc $\chi\left(\frac{s}{k}\right) = 0$, et par suite, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{s}{k} \leqslant t$, on obtient

$$\chi(t) = \chi\left(t - \frac{s}{k} + \frac{s}{k}\right) = \chi\left(t - \frac{s}{k}\right) \cdot \chi\left(\frac{s}{k}\right) = 0 .$$

Ainsi $\chi \neq 1_{\{0\}}$, χ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Il est alors clair que $\ln \chi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est additive, donc se prolonge en une forme $\mathbb{Q}$-linéaire sur $\mathbb{R}$.

Si $(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}})^*$ désigne le dual algébrique du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$, nous avons montré que

$$(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}})^* \longrightarrow \mathcal{EXP}(\mathbb{R}_+) \smallsetminus \left\{1_{\{0\}}\right\} : \ell \longmapsto e^{\ell}$$

est un isomorphisme de groupe.

Pour terminer voici un autre exemple montrant qu'une fonction exponentielle peut prendre des valeurs négatives :

EXEMPLE On considère le monoïde commutatif $[-1,1]$ muni de la multiplication. L'élément neutre est 1 et -1 n'est pas un carré ! Nous allons voir que certaines fonctions exponentielles prennent des valeurs négatives.

Si χ est un caractère, alors

$$1 = \chi(1) = \chi\left((-1)^2\right) = \chi(-1)^2 ,$$

donc $\chi(-1) = \pm 1$ et par suite

$$\chi(-s) = \chi(-1) \cdot \chi(s) \quad \text{pour tout } s \in [0,1] \ .$$

Si $\chi(-1) = -1$, on a nécessairement $\chi(0) = 0$. Si $\chi(0) \neq 0$, il vient

$$\chi(0) = \chi(0 \cdot 0) = \chi(0)^2 \ ,$$

donc $\chi(0) = 1$ et par suite

$$1 = \chi(0) = \chi(0 \cdot s) = \chi(0) \cdot \chi(s) = \chi(s) \quad \text{pour tout } s \in [-1,1] \ .$$

L'application $e^{-\,\mathrm{id}} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow]0,1]$ est un isomorphisme de monoïde, dont l'aplication réciproque est $-\ln :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Si χ est un caractère, alors $\chi \circ e^{-\,\mathrm{id}}$ est un caractère de $\mathbb{R}_+$. Si χ est continu en 1 , $\chi \circ e^{-\,\mathrm{id}}$ est continu en 0 , donc de la forme $e^{w \cdot \mathrm{id}}$ pour un $w \in \mathbb{C}$ par la proposition 2 ; ainsi $\chi_{|]0,1]} = e^{-w \cdot \ln} = \mathrm{id}^{-w}$. La valeur en 0 étant déterminée par ce qui précède, les caractères continus en 1 sont donc de la forme

$$|\mathrm{id}|^{-w} \quad , \quad \mathrm{signum} \cdot |\mathrm{id}|^{-w} \quad \text{pour un } w \in \mathbb{C} \quad \text{ou bien} \quad \mathrm{signum}^2 = 1_{[-1,0[\cup]0,1]} \ .$$

Rappelons que $|\mathrm{id}|^0 = 1$.

Si χ est une fonction exponentielle bornée, il en est de même de $\chi \circ \exp$, donc de la forme $e^{-\alpha \cdot \mathrm{id}}$ pour $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}_+$ à nouveau par la proposition 2 ; ainsi $\chi_{|]0,1]} = e^{\alpha \cdot \ln} = \mathrm{id}^{\alpha}$. Les fonctions exponentielles bornées sont donc de la forme

$$|\mathrm{id}|^{\alpha} \quad , \quad \mathrm{signum} \cdot |\mathrm{id}|^{\alpha} \quad \text{pour un } \alpha \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad \text{ou bien} \quad \mathrm{signum}^2 = 1_{[-1,0[\cup]0,1]} \ .$$

On obtient ainsi une bijection

$$\overline{\mathbb{R}}_+ \times \{0\} \cup \overline{\mathbb{R}}_+ \times \{1\} \cup \{0\} \times \{2\} \longrightarrow \mathcal{EXP}^b([-1,1]) : (\alpha, \varepsilon) \longmapsto \mathrm{signum}^{\varepsilon} \cdot |\mathrm{id}|^{\alpha} \ .$$

EXERCICE Si G et H sont des monoïdes involutifs, soit $G \times H$ le monoïde involutif défini par

$$(s,u) \cdot (t,v) := (st, uv) \quad \text{et} \quad (s,u)^* := (s^*, u^*)$$

pour tout $s,t \in G$ et $u,v \in H$. Montrer qu'il existe un isomorphisme de semi-groupe topologique canonique

$$\mathrm{Sp}\, G \times \mathrm{Sp}\, H \longrightarrow \mathrm{Sp}\,(G \times H)$$

appliquant $\mathrm{Sp}^h G \times \mathrm{Sp}^h H$ sur $\mathrm{Sp}^h(G \times H)$ et $\mathrm{Sp}^b G \times \mathrm{Sp}^b H$ sur $\mathrm{Sp}^b(G \times H)$.

2.2 Le dual restreint d'un cône convexe de $\mathbb{R}^n$

DÉFINITION 1 Rappelons que $\overset{\circ}{A}$ désigne l'intérieur d'une partie A d'un espace topologique.

Si C est un cône convexe de $\mathbb{R}^n$ nous désignerons par

$$C^\circ := \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x|\, y) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in C\}$$

le *cône dual* (ou *polaire*) de C .

THÉORÈME *Tout cône convexe C de $\mathbb{R}^n$ est un monoïde commutatif pour l'addition induite par $\mathbb{R}^n$ et 2-divisible.*

Si $C - C = \mathbb{R}^n$, alors tout caractère continu en 0 de C est la forme

$$e^{(\,w|\,\mathrm{id})} : s \longmapsto e^{(\,w|s)} : C \longrightarrow \mathbb{C} \quad \textit{pour } w \in \mathbb{C}^n$$

et

$$e^{(\,w|\,\mathrm{id})} : s \longmapsto e^{(\,w|s)} : C \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textit{pour } w \in \mathbb{R}^n$$

sont les fonctions exponentielles continues sur C . Celles qui sont bornées s'écrivent

$$e^{-(\,w|\,\mathrm{id})} : s \longmapsto e^{-(\,w|s)} : C \longrightarrow [0,1] \quad \textit{avec } w \in C^\circ \ .$$

Les fonctions exponentielles bornées qui ne sont pas continue s'annulent sur $\overset{\circ}{C}$.

En effet les fonctions de la forme indiquée sont évidemment des caractères. Réciproquement si χ est un caractère de C continu en 0 , on a $\chi(s) \neq 0$ pour tout $s \in C$; en effet si $0 = \chi(s) = \chi\left(\frac{s}{k}\right)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\chi\left(\frac{s}{k}\right) = 0$, donc $1 = \chi(0) = \lim_k \chi\left(\frac{s}{k}\right) = 0$ ce qui est absurde. Désignons encore par χ l'unique caractère de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$s - t \longmapsto \frac{\chi(s)}{\chi(t)} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} \ .$$

Pour tout $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{3}\right[$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\chi(B_\delta \cap C) \subset B(1,\varepsilon) \ ,$$

donc

$$\chi(B_\delta \cap C - B_\delta \cap C) \subset B(1,\varepsilon) \cdot B(1,\varepsilon)^{-1} \subset B\left(1, \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) \subset D(1,1) \ ,$$

puisque pour tout $\alpha, \beta \in B(1,\varepsilon)$, on a

$$\left|\frac{\alpha}{\beta} - 1\right| = \frac{|\alpha - 1 + 1 - \beta|}{|1 + \beta - 1|} \leqslant \frac{|\alpha - 1| + |1 - \beta|}{1 - |\beta - 1|} \leqslant \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} < 1 \ .$$

Ainsi χ sera continu en 0 si nous montrons que $B_\delta \cap C - B_\delta \cap C$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$. Mais puisque $\mathbb{R}^n = C - C$, en choisissant une base de $\mathbb{R}^n$ contenue dans C , il n'est pas difficile de montrer qu'il existe $s \in B_\delta \cap C$ et un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $s + V \subset B_\delta \cap C$. En particulier $s \in \overset{\circ}{C}$. On a alors

$$V \subset B_\delta \cap C - s \subset B_\delta \cap C - B_\delta \cap C \ .$$

Pour tout $s, t \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\chi(s+t) - \chi(s) = \chi(s) \cdot [\chi(t) - 1]$$

ce qui montre que χ est continu sur $\mathbb{R}^n$. Comme dans l'exemple précédent, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geqslant N$, on ait

$$\chi\left(2^{-k} \cdot e_j\right) = e^{w_{k,j}} \quad \text{avec } w_{k,j} \in \mathbb{R} + i \cdot]-\pi, \pi[$$

et $\lim_k w_{k,j} = 0$. D'autre part

$$e^{2w_{k+1,j}} = \chi\left(2^{-k-1} \cdot e_j\right)^2 = \chi\left(2^{-k} \cdot e_j\right) = e^{w_{k,j}} \ ,$$

donc $2w_{k+1,j} - w_{k,j} \in 2\pi i \cdot \mathbb{Z}$, et nous pouvons supposer, en choisissant N plus grand, que $2w_{k+1,j} = w_{k,j}$ pour tout $j \in n$ et $k \geqslant N$. Posons $w_k := (w_{k,j})_{j \in n}$ et $w := 2^N \cdot (w_{N,j})_{j \in n} \in \mathbb{C}^n$. Ainsi

$$w_k = 2^{N-k} \cdot w_N = 2^{-k} \cdot w \quad \text{pour tout } k \geqslant N \ ,$$

et par suite

$$\chi\left(\sum_{j \in n} 2^{-k} \cdot l_j \cdot e_j\right) = \prod_{j \in n} \chi\left(2^{-k} \cdot e_j\right)^{l_j} = e^{\sum_{j \in n} w_{k,j} \cdot l_j} = e^{(w_k | l)} = e^{\left(w | 2^{-k} \cdot l\right)}$$

pour tout $k \geqslant N$ et $l \in \mathbb{Z}^n$.

Par la densité de $\left\{2^{-k} \cdot l \mid k \geqslant N \text{ et } l \in \mathbb{Z}^n\right\}$ dans $\mathbb{R}^n$ et la continuité de χ , on obtient

$$\chi = e^{(w | \operatorname{id})} \ .$$

On a alors $e^{-(w|C)} \subset [0,1]$ si, et seulement si, $(w|C) \subset \mathbb{R}_+$, i.e. $w \in C^\circ$.

Si χ est une fonction exponentielle sur C à valeurs dans $[0,1]$, la formule

$$\chi(s+t) = \chi(s) \cdot \chi(t) \leqslant \chi(t) \quad \text{pour tout } s, t \in C$$

montre qu'elle est décroisssante pour l'ordre défini par C . Si elle n'est pas continue en 0 , il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $(s_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C$ tels que $\lim_k s_k = 0$ et $\chi(s_k) \leqslant 1 - \varepsilon$. Soit maintenant $s \in \overset{\circ}{C}$ et U un voisinage symétrique de 0 tel que $s + U \subset C$. Si $u \in U$, on a $-u \in U$, donc $s - u \in C$ et par suite $u - s \in -C$, ce qui montre que $u \in s - C$. Ainsi $U \cap C \subset (s - C) \cap C$ et il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $s_k \in (s - C) \cap C$. Ceci montre que $s \in s_k + C$ et par suite que

$$\overset{\circ}{C} \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} s_k + C \ .$$

Mais $\chi \leqslant 1 - \varepsilon$ sur $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} s_k + C$. Pour tout $s \in \overset{\circ}{C}$ et $l \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{s}{l} \in \overset{\circ}{C}$, donc

$$\chi(s) = \lim_l \chi\left(\frac{s}{l}\right)^l \leqslant \lim_l (1 - \varepsilon)^l = 0 \ .$$

□

REMARQUE 1 La structure de l'ensemble des fonctions exponentielles bornées non-continues dépend de la structure faciale de la frontière de C : $\operatorname{Fr} C := C \setminus \overset{\circ}{C}$.

REMARQUE 2 Une fonction exponentielle bornée étant décroissante sur C , elle est constante égale à 1 sur tout sous-espace vectoriel E contenu dans C , donc constante sur toute classe $\operatorname{mod} E$.

DÉFINITION 2 Si C est un cône convexe dans un espace vectoriel réel F , on dit qu'un sous-cône convexe $D \neq \{0\}$ de C est une *face* si $(D - C) \cap C = D$.

Si une face D est une demi-droite, donc de la forme $\mathbb{R}_+ \cdot \varphi$ pour un $\varphi \in C \setminus \{0\}$, on dit que c'est une *génératrice extrémale* de C et que φ est un *générateur extrémal* .

On désigne par $\leqslant_C$ le préordre défini par C , i.e. pour tout $\varphi, \psi \in F$, on écrit $\varphi \leqslant_C \psi$ si $\psi - \varphi \in C$.

L'inclusion $(D - C) \cap C \supset D$ est triviale et une génératrice extrémale est une face minimale. L'espace vectoriel $C \cap (-C)$ est une face minimale.

LEMME 1 *Soient C est un cône convexe.*

(i) Pour que $\leqslant_C$ soit un ordre, il faut et il suffit que que C soit pointu, i.e. $C \cap (-C) = \{0\}$.

Soit $D \neq \{0\}$ un sous-cône convexe de C .

(ii) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) D est une face de C .

(b) Pour tout $\delta \in D$ et $\varphi \in C$ tel que $\varphi \leqslant_C \delta$, on a $\varphi \in D$.

(c) Pour tout $\varphi, \psi \in C$ tel que $\varphi + \psi \in D$, on a $\varphi, \psi \in D$.

(iii) Supposons que C est pointu et soient $\ell \in F^*$ une forme linéaire sur F , $X := \{\ell = 1\} \cap C$ et $\delta \in X$.

Pour que δ soit un générateur extrémal de C , il faut et il suffit que δ soit un point extrémal de X .

Démonstration de (i) Pour que $\leqslant_C$ soit un ordre, il faut et il suffit que pour tout $\varphi, \psi \in F$ tels que $\varphi \leqslant_C \psi$ et $\psi \leqslant_C \varphi$, i.e. $\psi - \varphi, \varphi - \psi \in C$, entraîne $\varphi = \psi$, ce qui est manifestement équivalent à $C \cap (-C) = \{0\}$.

Démonstration de (ii)

(a) $\Rightarrow$ (b) On a $\delta - \varphi \in C$, donc $\delta - (\delta - \varphi) = \varphi \in (D - C) \cap C$, donc $\varphi \in D$.

(b) $\Rightarrow$ (c) On a $\varphi \in C$ et $\varphi \leqslant_C \varphi + \psi \in D$, donc $\varphi \in D$. Par symétrie on a aussi $\psi \in D$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Etant donné $\varphi \in (D - C) \cap C$, on a $\varphi = \delta - \psi$ pour un $\delta \in D$ et un $\psi \in C$, donc $\varphi + \psi = \delta \in D$, et par suite $\varphi \in D$.

Démonstration de (iii) La condition est nécessaire, car si δ est un générateur extrémal de C et $\delta = \frac{1}{2} \cdot (\varphi + \psi)$ pour $\varphi, \psi \in X$, alors $\frac{1}{2} \cdot \varphi \in \mathbb{R}_+ \cdot \delta$, i.e. $\frac{1}{2} \cdot \varphi = \beta \cdot \delta$ pour un $\beta \in \mathbb{R}_+$; mais

$$\frac{1}{2} = \ell\left(\frac{1}{2} \cdot \varphi\right) = \ell(\beta \cdot \delta) = \beta ,$$

donc $\varphi = \delta = \psi$, ce qui montre que δ est un point extrémal.

Réciproquement si $\delta = \varphi + \psi$ pour $\varphi, \psi \in C$, alors $1 = \ell(\delta) = \ell(\varphi) + \ell(\psi)$. Il nous faut distinguer un certain nombre de cas :

(a) $\ell(\varphi) \leqslant 0$: on a $\ell(\psi) \geqslant 1$ et on peut écrire

$$\delta = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\psi}{\ell(\psi)} + 2 \cdot \delta - \frac{\psi}{\ell(\psi)}\right] ;$$

mais

$$\ell\left(\frac{\psi}{\ell(\psi)}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \ell\left(2\cdot\delta - \frac{\psi}{\ell(\psi)}\right) = 2 - 1 = 1$$

et trivialement $\frac{\psi}{\ell(\psi)} \in C$, tandis que $2\cdot\delta - \frac{\psi}{\ell(\psi)} = 2\cdot\varphi + \psi + \left(1 - \frac{1}{\ell(\psi)}\right)\cdot\psi \in C$; ainsi $\frac{\psi}{\ell(\psi)}$, $2\cdot\delta - \frac{\psi}{\ell(\psi)} \in X$,et, puisque δ est un point extrémal de X , il vient en particulier

$$\frac{\psi}{\ell(\psi)} = 2\cdot\delta - \frac{\psi}{\ell(\psi)} = \delta \ ,$$

donc $\psi = \ell(\psi)\cdot\delta \in \mathbb{R}_+\cdot\delta$ et $\varphi = (1-\ell(\psi))\cdot\delta$. Si $\ell(\psi) = 1$, on a $\varphi = 0 \in \mathbb{R}_+\cdot\delta$; si $\ell(\psi) > 1$, on a $\varphi \in \mathbb{R}_-^*\cdot\delta$, donc $\mathbb{R}\cdot\varphi \subset C$, ce qui est absurde, puisque C est pointu.

(b) $\ell(\psi) \leqslant 0$: analogue par symétrie.

(c) $\ell(\varphi), \ell(\psi) > 0$: on a

$$\delta = \ell(\varphi)\cdot\frac{\varphi}{\ell(\varphi)} + \ell(\psi)\cdot\frac{\psi}{\ell(\psi)} \ ,$$

mais $\frac{\varphi}{\ell(\varphi)}$, $\frac{\psi}{\ell(\psi)} \in X$, donc $\frac{\varphi}{\ell(\varphi)} = \frac{\psi}{\ell(\psi)} = \delta$ (cf. exercice 1.3.1), et par suite $\varphi, \psi \in \mathbb{R}_+\cdot\delta$.

$\square$

L'étude des fonctions exponentielles bornées non-continues est ramenée à l'étude des faces, contenues dans $\operatorname{Fr} C$, donc de dimension strictement inférieure à celle de C et de leur interaction dans C . Soit χ une fonction exponentielle non-continue. Si pour $j = 1, 2$, D_j est une face de C contenues dans $\operatorname{Fr} C$ et si $x_j \in D_j$ sont tels que $x_1 + x_2 \in \overset{\circ}{C}$, alors l'un des $\chi(x_j)$ doit être 0 . Connaissant $\mathcal{EXP}(D)$ pour toutes les faces de C contenues dans $\operatorname{Fr} C$, on peut en principe calculer $\mathcal{EXP}(C)$.

EXEMPLE 1 Tout cône convexe fermé pointu engendrant $\mathbb{R}^2$ est affinement isomorphe au cône convexe canonique $\mathbb{R}_+^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Les fonctions exponentielles continues bornées sur $\mathbb{R}_+^2$ sont de la forme $e^{-(w|\operatorname{id})}$ avec $w \in \mathbb{R}_+^2 = \left(\mathbb{R}_+^2\right)^\circ$. D'autre part les faces de $\mathbb{R}_+^2$ sont $\mathbb{R}_+ \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbb{R}_+$. Ainsi une fonction exponentielle χ bornée non-continue, qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^* \times \{0\}$, doit s'annuler sur $\{0\} \times \mathbb{R}_+^*$ et vice versa. Elles sont donc de la forme

$$s \longmapsto e^{-\alpha_1\cdot s_1 - \infty\cdot s_2} \qquad \text{et} \qquad s \longmapsto e^{-\infty\cdot s_1 - \alpha_2\cdot s_2} \ .$$

On a donc une bijection

$$\overline{\mathbb{R}}_+^2 \longrightarrow \mathcal{EXP}^b\left(\mathbb{R}_+^2\right) = \mathcal{EXP}^b(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{EXP}^b(\mathbb{R}_+) : \alpha \longmapsto e^{-\alpha_1\cdot\mathrm{pr}_1 - \alpha_2\cdot\mathrm{pr}_2}$$

et c'est un homémorphisme, puisque $\overline{\mathbb{R}}_+^2$ est compact.

EXEMPLE 2 Le cône convexe fermé $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ engendre $\mathbb{R}^2$. Les fonctions exponentielles continues bornées sont de la forme $e^{-(w|\operatorname{id})}$ pour un $w \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)^\circ = \{0\} \times \mathbb{R}_+$, donc de la forme $e^{-\alpha\cdot\mathrm{pr}_2}$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Une fonction exponentielle bornée non-continue est égale à 0 sur $\overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et à 1 sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R} \times \{0\}$; elle est donc égale à $1_{\mathbb{R}\times\{0\}}$ et on obtient un homémorphisme

$$\overline{\mathbb{R}}_+ \longrightarrow \mathcal{EXP}^b(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) : \alpha \longmapsto e^{-\alpha\cdot\mathrm{pr}_2} \ .$$

Nous aurions aussi pu constater qu'une fonction exponentielle bornée étant constante sur les classes $\mathrm{mod}\,\mathbb{R}\times\{0\}$, elle induit une fonction exponentielle bornée sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+/\mathbb{R}\times\{0\} = \mathbb{R}_+$ et nous sommes ramener à la proposition 2.

LEMME 2 *Soit $\rho\in\mathbb{R}_+^*$ et considérons le cône convexe fermé de $\mathbb{R}^3$*

$$C_\rho := \left\{ s\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \sqrt{s_1^2+s_2^2}\leqslant\rho\cdot s_3 \right\} .$$

On a

$$\mathrm{Fr}\, C_\rho = C_\rho \smallsetminus \overset{\circ}{C}_\rho = \left\{ s\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \sqrt{s_1^2+s_2^2}=\rho\cdot s_3 \right\} \qquad \text{, ainsi que} \qquad C_\rho^\circ = C_{\frac{1}{\rho}} ,$$

et pour tout $w\in C_{\frac{1}{\rho}}\smallsetminus\{0\}$, $s\in C_\rho\smallsetminus\{0\}$, la relation $(w|\,s)=0$ est équivalente à

$$w\in\mathrm{Fr}\,C_{\frac{1}{\rho}} \qquad \text{et} \qquad s=\beta\cdot w^\perp\in\mathrm{Fr}\,C_\rho \quad \text{pour un } \beta\in\mathbb{R}_+^* ,$$

où $w^\perp := \left(-w_1,-w_2,\frac{w_3}{\rho^2}\right)^\intercal$.

La première partie est évidente puisque les fonctions $\sqrt{\mathrm{pr}_1^2+\mathrm{pr}_2^2}$ et pr_3 sont continues. Pour la deuxième formule, si $w\in C_\rho^\circ$, en posant $s_w := \left(-w_1,-w_2,\frac{\sqrt{w_1^2+w_2^2}}{\rho}\right)^\intercal \in C_\rho$, on a $0\leqslant (w|\,s_w) = -w_1^2-w_2^2+\frac{w_3\cdot\sqrt{w_1^2+w_2^2}}{\rho}$, donc $\sqrt{w_1^2+w_2^2}\leqslant\frac{1}{\rho}\cdot w_3$, et par suite $w\in C_{\frac{1}{\rho}}$. Réciproquement si $w\in C_{\frac{1}{\rho}}$ et $s\in C_\rho$, alors $w\in C_\rho^\circ$ car

$$(w|\,s) = w_1\cdot s_1+w_2\cdot s_2+w_3\cdot s_3 \geqslant w_1\cdot s_1+w_2\cdot s_2+\rho\cdot\sqrt{w_1^2+w_2^2}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\sqrt{s_1^2+s_2^2}\geqslant 0$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$:

$$-(w_1\cdot s_1+w_2\cdot s_2)\leqslant\left|\left(\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}s_1\\s_2\end{pmatrix}\right)\right|\leqslant\sqrt{w_1^2+w_2^2}\cdot\sqrt{s_1^2+s_2^2}\,!$$

De même on a $(w|\,s)=0$ si, et seulement si,

$$0=(w|\,s) = w_1\cdot s_1+w_2\cdot s_2+w_3\cdot s_3 \geqslant w_1\cdot s_1+w_2\cdot s_2+\rho\cdot\sqrt{w_1^2+w_2^2}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\sqrt{s_1^2+s_2^2}\geqslant 0 ,$$

et cette égalité signifie d'une part que

$$w_3=\rho\cdot\sqrt{w_1^2+w_2^2} \quad \text{et} \quad s_3=\frac{1}{\rho}\cdot\sqrt{s_1^2+s_2^2} ,$$

i.e. $w\in\mathrm{Fr}\,C_{\frac{1}{\rho}}$ et $s\in\mathrm{Fr}\,C_\rho$, et d'autre part que

$$\left(\begin{pmatrix}-w_1\\-w_2\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}s_1\\s_2\end{pmatrix}\right) = \sqrt{w_1^2+w_2^2}\cdot\sqrt{s_1^2+s_2^2} ,$$

i.e. $\begin{pmatrix}s_1\\s_2\end{pmatrix}=\beta\cdot\begin{pmatrix}-w_1\\-w_2\end{pmatrix}$ pour un $\beta\in\mathbb{R}_+^*$ par la caractérisation de l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $\sqrt{w_1^2+w_2^2}\cdot\sqrt{s_1^2+s_2^2}\neq 0$. Puisque

$$s_3=\frac{1}{\rho}\cdot\sqrt{s_1^2+s_2^2}=\beta\cdot\frac{\sqrt{w_1^2+w_2^2}}{\rho}=\beta\cdot\frac{w_3}{\rho^2} ,$$

on en déduit la dernière assertion. $\square$

PROPOSITION *Les fonctions exponentielles continues bornées sur C_ρ s'écrivent*

$$e^{-(w|\,\mathrm{id})} : s \longmapsto e^{-(w|s)} : C \longrightarrow [0,1] \quad \textit{avec } w \in C_{\frac{1}{\rho}} \ .$$

Toute génératrice extrémale de C_ρ est de la forme $\mathbb{R}_+ \cdot u^\perp$ pour un $u \in \mathbb{S}^2 \cap \operatorname{Fr} C_{\frac{1}{\rho}}$ et une fonction exponentielle bornée non-continue $\neq 0$ sur $\mathbb{R}_+^* \cdot u^\perp$ est de la forme

$$e^{-(\alpha \cdot e_3 + \infty \cdot u|\,\mathrm{id})} : s \longmapsto e^{-\alpha \cdot (e_3|s)} e^{-\infty \cdot (u|s)} : C \longrightarrow [0,1] \ .$$

Finalement l'application

$$C_{\frac{1}{\rho}} \cup \left(\mathbb{R}_+ \cdot e_3 + \infty \cdot \mathbb{S}^2 \cap \operatorname{Fr} C_{\frac{1}{\rho}}\right) \cup \{\infty \cdot e_3\} \longrightarrow \mathcal{EXP}^b\left(C_\rho\right) : w \longmapsto e^{-(w|\,\mathrm{id})}$$

est une bijection, mais aussi un homéomorphisme en munissant le membre de gauche de la topologie adéquate !

La première partie découle du théorème qui précède. En outre, pour tout $u \in \mathbb{S}^2 \cap \operatorname{Fr} C_{\frac{1}{\rho}}$, on a

$$\mathbb{R}_+ \cdot u^\perp = \{(u|\diamond) = 0\} \cap C_\rho \qquad \text{et} \qquad C_\rho \subset \{(u|\diamond) \geqslant 0\} \ ,$$

ainsi que $\operatorname{Fr} C_\rho = \bigcup_{u \in \mathbb{S}^2 \cap \operatorname{Fr} C_{\frac{1}{\rho}}} \mathbb{R}_+ \cdot u^\perp$.

On en déduit que $\mathbb{R}_+ \cdot u^\perp$ est une génératrice extrémale de C_ρ , puisque

$$\left(\mathbb{R}_+ \cdot u^\perp - C_\rho\right) \cap C_\rho \subset \{(u|\diamond) \leqslant 0\} \cap \{(u|\diamond) \geqslant 0\} \cap C_\rho = \{(u|\diamond) = 0\} \cap C_\rho = \mathbb{R}_+ \cdot u^\perp \ .$$

Si χ est une fonction exponentielle bornée non-continue $\neq 0$ sur $\mathbb{R}_+^* \cdot u^\perp$, on a $\chi\left(u^\perp\right) \neq 0$ (exemple 2), et elle est nulle sur $\operatorname{Fr} C_\rho \setminus \mathbb{R}_+ \cdot u^\perp$, car pour tout $s \in \operatorname{Fr} C_\rho \setminus \mathbb{R}_+ \cdot u^\perp$, on a $s + u^\perp \in \overset{\circ}{C}$, donc $0 = \chi\left(s + u^\perp\right) = \chi(s) \cdot \chi\left(u^\perp\right)$ et par suite $\chi(s) = 0$. Nous pouvons en outre supposer que χ est de la forme $e^{-(\alpha \cdot e_3|\,\mathrm{id})}$ sur $\mathbb{R}_+ \cdot u^\perp$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et χ s'écrit sur C_ρ sous la forme

$$\chi = e^{-(\alpha \cdot e_3 + \infty \cdot u|\,\mathrm{id})} \ ,$$

car pour $s \in \mathbb{R}_+ \cdot u^\perp$, on a

$$e^{-(\alpha \cdot e_3 + \infty \cdot u|s)} = e^{-(\alpha \cdot e_3|s)} \cdot e^{-\infty \cdot 0} = e^{-(\alpha \cdot e_3|s)} \ ,$$

tandis que si $s \in \operatorname{Fr} C_\rho \setminus \mathbb{R}_+ \cdot u^\perp$, on a

$$e^{-(\alpha \cdot e_3 + \infty \cdot u|s)} = e^{-(\alpha \cdot e_3|s)} \cdot e^{-\infty \cdot (u|s)} = e^{-(\alpha \cdot e_3|s)} \cdot 0 = 0 \ .$$

Finalement si χ est une fonction exponentielle bornée non-continue $= 0$ sur $\operatorname{Fr} C_\rho$, on a évidemment $\chi = 1_{\{0\}} = e^{-(\infty \cdot e_3|\,\mathrm{id})}$! $\square$

2.3 Théorème de Hausdorff-Bernstein-Widder

Dans ce paragraphe G est un monoïde commutatif muni de l'involution id_G .

DÉFINITION 1 Rappelons que $G^0 = \{0\}$. Pour tout $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ et $t \in G$, on définit

$$\tau_t : \mathbb{R}^G \longrightarrow \mathbb{R}^G : f \longmapsto \tau_t f := f(\diamond + t) \ ,$$

i.e.

$$\tau_t f(u) = f(u+t) \ ,$$

et

$$\Delta_t := \mathrm{Id} - \tau_t : \mathbb{R}^G \longrightarrow \mathbb{R}^G : f \longmapsto \Delta_t f := f - f(\diamond + t) \ ,$$

puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $s \in G^n$, les applications

$$\Delta_s : \mathbb{R}^G \longrightarrow \mathbb{R}^G : f \longmapsto \Delta_s f$$

par récurrence en posant

$$\Delta_0 := \mathrm{Id} : \mathbb{R}^G \longrightarrow \mathbb{R}^G$$

et

$$\Delta_{s \cup (t)} = \Delta_t \Delta_s \ .$$

LEMME *L'algèbre unifère engendrée par les translations τ_t , pour $t \in G$, est commutative. En particulier, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $s \in G^n$ et $t \in G^m$, on a*

$$\Delta_s \Delta_t = \Delta_t \Delta_s \ .$$

C'est évident, puisque les translations commutent deux à deux. □

DÉFINITION 2 On dit que f est *complètement monotone* si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $s \in G^n$, on a $\Delta_s f \geqslant 0$. Nous désignerons par $\mathcal{FCM}(G)$ l'ensemble des fonctions complètement monotones sur G .

REMARQUE 1 Soit X un ensemble et munissons $\mathbb{K}^{(X)}$ de la topologie localement convexe la plus fine. Son dual faible est $\mathbb{K}^X$ muni de la topologie de la convergence ponctuelle. On en déduit que le dual de $\mathbb{K}^X$ est $\mathbb{K}^{(X)}$ (cf. [Por AF], théorème 3.7.i). En fait $\mathbb{K}^X$ est le dual algébrique de $\mathbb{K}^{(X)}$, puisque $\left(1_{\{x\}}\right)_{x \in X}$ en est une base algébrique ; mais il faut sortir du cadre algébrique et introduire la topologie faible sur le dual, ici la topologie de la convergence ponctuelle, pour obtenir $\left(\mathbb{K}^X\right)' = \mathbb{K}^{(X)}$! Nous en aurons besoin ci-dessous.

Rappelons que l'on a une semi-dualité séparante $\left\langle \mathbb{K}^{(X)} \middle| \mathbb{K}^X \right\rangle$ définie par

$$\langle \varphi | \mu \rangle := \sum_{x \in X} \overline{\varphi(x)} \cdot \mu(x) \ ,$$

en particulier $\left\langle 1_{\{x\}} \middle| \mu \right\rangle = \mu(x)$.

THÉORÈME 1 *$\mathcal{FCM}(G)$ est un cône convexe fermé dans $\mathbb{R}^G$, pour la topologie de la convergence simple, et l'ensemble $\mathcal{FCM}^1(G)$ des $f \in \mathcal{FCM}(G)$ avec $f(0) = 1$ est un ensemble convexe compact et, pour tout $f \in \mathcal{CM}(G) \smallsetminus \{0\}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha \cdot f \in \mathcal{FCM}^1(G)$. On a*

$$\mathcal{EXP}(G) \cap \mathcal{FCM}(G) = \mathcal{EXP}_+^b(G) = Ch\left(\mathcal{FCM}^1(G)\right) = \check{S}\left(\mathcal{FCM}^1(G)\right) \ .$$

C'est une partie compacte de $\mathcal{FCM}^1(G)$.

C'est un cône convexe fermé car les applications $\Delta_s : \mathbb{R}^{\mathbb{G}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{G}}$ sont linéaires et continues. Pour tout $f \in \mathcal{FCM}(G)$ et $s \in G$, on a

$$f(s) = \Delta_0 f(s) \geqslant 0$$

et

$$f(0) - f(s) = \Delta_s f(0) \geqslant 0 \ ,$$

donc

$$0 \leqslant f \leqslant f(0) \ .$$

Ceci montre que $\mathcal{FCM}^1(G) \subset [0,1]^G$, donc que $\mathcal{FCM}^1(G)$ est un ensemble compact par le théorème de Tychonoff, puisque $\mathcal{FCM}^1(G)$ est évidemment fermé. En outre si $f \neq 0$, on a

$$\frac{f}{f(0)} \in \mathcal{FCM}^1(G) \ .$$

Soit $\chi \in \mathcal{EXP}(G)$. On a $\Delta_0 \chi = \chi$ et

$$\Delta_s \chi = \chi - \chi(\diamond + s) = [1 - \chi(s)] \cdot \chi \quad \text{pour tout } s \in G \ .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $s \in G^n$, il vient donc par récurrence

$$\Delta_s \chi = \prod_{j=1}^n [1 - \chi(s_j)] \cdot \chi \ .$$

En outre $\chi(0) = 1$. Ceci montre que

$$\mathcal{EXP}_+^b(G) \subset \mathcal{FCM}^1(G) \ ,$$

donc que $\mathcal{EXP}(G) \cap \mathcal{FCM}(G) = \mathcal{EXP}_+^b(G)$. D'autre part l'équation fonctionnelle définissant les fonctions exponentielles étant une condition ponctuelle, cet ensemble est fermé.

Soit $f \in Ch\left(\mathcal{FCM}^1(G)\right)$ un point extrémal de $\mathcal{FCM}^1(G)$. Etant donné $t \in G$ définissons

$$f_1 := f(\diamond + t) \quad \text{et} \quad f_2 := f - f_1 = f - f(\diamond + t) = \Delta_t f \ .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $s \in G^n$, il vient

$$\Delta_s f_1 = \Delta_s(\tau_t f) = \tau_t(\Delta_s f) = (\Delta_s f)(t + \diamond) \geqslant 0$$

et

$$\Delta_s f_2 = \Delta_s(\Delta_t f) = \Delta_{(t) \cup s} f \geqslant 0 \ ,$$

donc $f_1, f_2 \in \mathcal{CM}(G)$.

Si $f_1(0) = 0$, on a $f_1 = 0$, donc $f(u + t) = 0$ pour tout $u \in G$, en particulier aussi $f(t) = 0$, donc

$$f(u + t) = 0 = f(u) \cdot f(t) \ .$$

Si $f_2(0) = 0$, on a $f_2 = 0$, donc $f(u+t) = f(u)$ pour tout $u \in G$, en particulier aussi $f(t) = f(0) = 1$, donc

$$f(u+t) = f(u) = f(u) \cdot f(t) \ .$$

Nous pouvons donc supposer que $f_1(0) \neq 0$ et $f_2(0) \neq 0$. On a $f_1(0) + f_2(0) = f(0) = 1$, $\frac{f_1}{f_1(0)}, \frac{f_2}{f_2(0)} \in \mathcal{FCM}^1(G)$ et

$$f = f_1 + f_2 = f_1(0) \cdot \frac{f_1}{f_1(0)} + f_2(0) \cdot \frac{f_2}{f_2(0)} \ ,$$

donc $f = \frac{f_1}{f_1(0)}$ et par suite

$$f(u+t) = f_1(u) = f_1(0) \cdot f(u) = f(u) \cdot f(t) \quad \text{pour tout } t \in G \ ,$$

ce qui finit de prouver que f est une fonction exponentielle, donc que $f \in \mathcal{EXP}_+^b(G)$.

Soient maintenant $\widetilde{\chi} \in \mathcal{EXP}_+^b(G)$ et, pour $s \in G$,

$$a_s : f \longmapsto f(2 \cdot s) - 2 \cdot \widetilde{\chi}(s) \cdot f(s) + \widetilde{\chi}(s)^2 : \mathcal{FCM}^1(G) \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

On a $a_s \in \mathcal{A}\left(\mathcal{FCM}^1(G)\right)$, $a_s(\widetilde{\chi}) = 0$ et, pour toute fonction exponentielle χ ,

$$a_s(\chi) = \left[\chi(s) - \widetilde{\chi}(s)\right]^2 \geqslant 0 \ .$$

Mais comme tout point extrémal de $\mathcal{FCM}^1(G)$ est une fonction exponentielle par ce qui précède, le principe du minimum 1.5 montre que $a_s \geqslant 0$. Pour toute partie finie $S \subset G$, on a

$$a_S := \sum_{s \in S} a_s \in \mathcal{A}\left(\mathcal{FCM}^1(G)\right) \quad , \quad a_S(\widetilde{\chi}) = 0 \quad \text{et} \quad a_S \geqslant 0 \ .$$

Comme $(a_S)_{S \in \mathfrak{P}^f(G)}$ est filtrant croissant, la fonction $b := \sup_{S \in \mathfrak{P}^f(G)} a_S$ est concave s.c.i. à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et satisfait à $b(\widetilde{\chi}) = 0$. D'après le principe du minimum, il existe $f \in Ch\left(\mathcal{FCM}^1(G)\right)$ avec

$$\left[f(s) - \widetilde{\chi}(s)\right]^2 = a_s(f) \leqslant b(f) = \min b\left(\mathcal{FCM}^1(G)\right) = 0 \quad \text{pour tout } s \in G \ ,$$

donc $\widetilde{\chi} = f \in Ch\left(\mathcal{FCM}^1(G)\right)$. □

COROLLAIRE *Pour toute intégrale de Radon $\mu \in \mathcal{M}_+\left(\mathcal{EXP}_+^b(G)\right)$ l'application $\iota : \mathcal{EXP}_+^b(G) \longrightarrow \mathbb{R}^G$ est μ-intégrable et la fonction*

$$f := \mathcal{FL}\mu := \int \chi \, d\mu(\chi) \ ,$$

i.e.

$$f(s) = \int \chi(s) \ d\mu(\chi) \quad \textit{pour tout } s \in G \ ,$$

est complètement monotone. On dit que c'est la transformée de Fourier-Laplace *de μ .*

Réciproquement toute fonction $f \in \mathcal{FCM}(G)$ est la transformée de Fourier-Laplace d'une unique intégrale de Radon μ sur $\mathcal{EXP}_+^b(G)$.

Pour la première partie, rappelons que $\left(\mathbb{R}^G\right)' = \mathbb{R}^{(G)}$ par la remarque ci-dessus ; ainsi $f = \int \chi \, d\mu(\chi)$ signifie que

$$\langle \varphi | f \rangle = \int \langle \varphi | \chi \rangle \ d\mu(\chi) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathbb{R}^{(G)} \ ,$$

ou encore

$$f(s) = \langle 1_{\{s\}} | f \rangle = \int \langle 1_{\{s\}} | \chi \rangle \, d\mu(\chi) = \int \chi(s) \, d\mu(\chi) \quad \text{pour tout } s \in G \ .$$

L'application ι est μ-intégrable par le lemme 1.3.1.

La réciproque découle du théorème de Choquet-Bishop-de Leeuw (corollaire 1.5) appliqué à $\frac{f}{f(0)}$. Prouvons l'unicité. Pour tout $s, t \in G$, la fonction

$$\mathcal{G}s : \mathcal{EXP}_+^b(G) \longrightarrow \mathbb{R} : \chi \longmapsto \chi(s)$$

est continue et, on a

$$\mathcal{G}(s+t) = \mathcal{G}s \cdot \mathcal{G}t \quad \text{ainsi que} \quad \mathcal{G}0 = 1 \ .$$

L'espace vectoriel $\operatorname{lin} \mathcal{G}(G)$ engendré par ces fonctions est donc une sous-algèbre contenant les constantes ($\mathcal{G}0 = 1$) de $\mathcal{C}\left(\mathcal{EXP}_+^b(G)\right)$ et séparant les points de $\mathcal{EXP}_+^b(G)$, puisque pour $\chi, \theta \in \mathcal{EXP}_+^b(G)$, $\chi \neq \theta$ signifie qu'il existe un $s \in G$ tel que

$$\mathcal{G}s(\chi) = \chi(s) \neq \theta(s) = \mathcal{G}s(\theta) \ .$$

Il est par suite dense par le théorème de Stone-Weierstraß. Si μ et ν sont deux intégrales de Radon sur $\mathcal{EXP}_+^b(G)$ qui représente f , pour tout $s \in G$, on a

$$\int \mathcal{G}s \, d\mu = \int \chi(s) \, d\mu(\chi) = f(s) = \int \chi(s) \, d\nu(\chi) = \int \mathcal{G}s \, d\nu \ ,$$

donc $\mu = \nu$ par linéarité et continuité. □

REMARQUE 2 Nous avons montrer que

$$\mathcal{FL} : \mathcal{M}_+\left(\mathcal{EXP}_+^b(G)\right) \longrightarrow \mathcal{FCM}(G)$$

est un isomorphisme de cône convexe. Nous montrerons plus tard que $\mathcal{FL}$ est un homéomorphisme (cf. théorème 2.8.1). Cela découle du fait (cf. Bourbaki [Bou 1981], EVT, III, §3, no. 4, proposition 5, p. 17) que les ensembles convexes compacts $\mathcal{M}_+^1\left(\mathcal{EXP}_+^b(G)\right)$ et $\mathcal{FCM}^1(G)$ sont homéomorphes : la topologie faible de $\mathcal{M}\left(\mathcal{EXP}_+^b(G)\right)$ est définie par $\mathcal{C}\left(\mathcal{EXP}_+^b(G)\right)$, tandis que celle de $\mathbb{R}^G$ l'est par $\mathbb{R}^{(G)} \cong \operatorname{lin} \mathcal{G}(G) \subset \mathcal{C}\left(\mathcal{EXP}_+^b(G)\right)$.

EXEMPLE Revenons aux exemples des propositions 1 et 2 de 2.1, où $G = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}_+$. Nous avons deux paramétrages de $\mathcal{EXP}_+^b(G)$. D'une part

$$\diamond^{\mathrm{id}} : r \longmapsto r^{\mathrm{id}} : [0,1] \longrightarrow \mathcal{EXP}_+^b(G)$$

et d'autre part

$$e^{-\diamond \cdot \mathrm{id}} : \alpha \longmapsto e^{-\alpha \cdot \mathrm{id}} : \overline{\mathbb{R}}_+ \longrightarrow \mathcal{EXP}_+^b(G) \ .$$

Ce sont des homéomorphismes. Rappelons que

$$-\ln : [0,1] \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \qquad \text{et} \qquad e^{-\mathrm{id}} : \overline{\mathbb{R}}_+ \longrightarrow [0,1]$$

sont des homéomorphismes réciproques.

Pour tout $f \in \mathcal{FCM}(G)$, il existe donc une unique intégrale de Radon ν sur $[0,1]$ telle que

$$f(s) = \int_0^1 t^s \, d\nu(t) \quad \text{pour tout } s \in G \ .$$

Dans le cas $G = \mathbb{N}$ nous avons résolu le problème des moments de Hausdorff :

THÉORÈME 2 (Hausdorff) *Pour qu'une suite une suite* $(f(k))_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *soit la suite des moments d'une intégrale de Radon* ν *sur* $[0,1]$ *, i.e.*

$$f(k) = \int_0^1 t^k \, d\nu(t) \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N} \ ,$$

il faut et il suffit que $f \in \mathcal{FCM}(\mathbb{N})$ *.*

Toute intégrale de Radon sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ est de la forme

$$\mu + c \cdot \varepsilon_\infty \quad \text{avec } \mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}_+) \text{ et } c \in \mathbb{R}_+ \ .$$

Pour tout $f \in \mathcal{FCM}(G)$, il existe donc $c \in \mathbb{R}_+$ et $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}_+)$ univoquement déterminés tels que

$$f = c \cdot 1_{\{0\}} + \int_0^\infty e^{-\alpha\cdot\mathrm{id}} \, d\mu(\alpha) \quad \text{dans } \mathbb{R}^G \ .$$

Considérons le cas $G = \mathbb{R}_+$ plus en détail. Le théorème de Lebesgue montre que la fonction $\int e^{-\alpha\cdot\mathrm{id}} \, d\mu(\alpha)$ est indéfiniment dérivable et que

$$(-1)^n \cdot \partial^n \int_0^\infty e^{-\alpha\cdot\mathrm{id}} \, d\mu(\alpha) = \int_0^\infty \alpha^n \cdot e^{-\alpha\cdot\mathrm{id}} \, d\mu(\alpha) \geqslant 0 \ .$$

Comme $1_{\{0\}}$ n'est même pas continue, si f est continue, on doit avoir $c = 0$, donc

$$f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}_+) \quad \text{et} \quad (-1)^n \cdot \partial^n f \geqslant 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \ .$$

Réciproquement si f est une telle fonction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}_+^n$ et $t, u \in \mathbb{R}_+$, on a $\partial\Delta_s f = \Delta_s \partial f$ par récurrence, car

$$\partial\left(\Delta_{s\cup(t)} f\right) = \partial\left(\Delta_s f - (\Delta_s f)(\diamond + t)\right) = \Delta_s \partial f - (\Delta_s \partial f)(\diamond + t) = \Delta_t \Delta_s \partial f = \Delta_{s\cup(t)} \partial f \ .$$

Egalement par récurrence on obtient

$$\Delta_s f(u) = (-1)^n \cdot \prod_{j\in n} s_j \cdot \partial^n f\left(u + \sum_{j\in n} \theta_j \cdot s_j\right) \geqslant 0 \ ,$$

pour certains $\theta_j \in \left]0,1\right[$, puisque la formule des accroissements finis montre qu'il existe $\theta_t \in \left]0,1\right[$ tel que

$$\Delta_{s\cup(t)} f(u) = \Delta_s f(u) - \Delta_s f(u+t) = -t \cdot \partial(\Delta_s f)(u + \theta_t \cdot t) = -t \cdot \Delta_s \partial f(u + \theta_t \cdot t) =$$

$$= -t \cdot (-1)^n \cdot \prod_{j\in n} s_j \cdot \partial^n(\partial f)\left(u + \theta_{t,u} \cdot t + \sum_{j\in n} \theta_j \cdot s_j\right) \ .$$

Ceci finit de montrer que f est complètement monotone. On en déduit le

THÉORÈME 3 (Bernstein) *La transformation de Laplace*

$$\mu \longmapsto \int_0^\infty e^{-\alpha\cdot\mathrm{id}} \, d\mu(\alpha)$$

est une bijection de $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}_+)$ *sur l'ensemble des fonctions* $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}_+)$ *telles que*

$$(-1)^n \cdot \partial^n f \geqslant 0 \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N} \ .$$

Pour d'autres démonstrations ou détails on peut consulter le livre de Widder [Wid 1946], le cours de H. Bauer [Bau 1963/64], l'article de G. Choquet [Cho 1969] ou le petit livre de R.R. Phelps déjà cité [Phe 1966].

2.4 Fonctions de type positif

DÉFINITION 1 Soient X un ensemble et $\varkappa : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction. Nous dirons que c'est un *noyau* .

On dit que $\varkappa$ est *hermitien* si, pour tout $x, y \in X$, on a $\varkappa(x, y) = \overline{\varkappa(y, x)}$.

On dit que $\varkappa$ est de *type positif* , si $\varkappa$ est hermitien et si

$$\sum_{x,y \in X} \overline{\varphi(x)} \cdot \varkappa(x, y) \cdot \varphi(y) \geqslant 0 \ ,$$

pour tout $\varphi \in \mathbb{K}^{(X)}$.

Nous désignerons par $\mathcal{TP}(X \times X)$ l'ensemble formé des noyaux de type positif.

LEMME *Pour tout* $x \in X$ *, on a*

$$\varkappa(x, x) \geqslant 0 \ .$$

Il suffit d'écrire la condition avec $1_{\{x\}}$. □

REMARQUE 1 Si $\varkappa : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ est un noyau de type positif, alors $\varkappa : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ l'est aussi.

Pour tout $\varphi \in \mathbb{C}^{(X)}$, on a

$$\sum_{x,y \in X} \overline{\varphi(x)} \cdot \varkappa(x, y) \cdot \varphi(y) = \sum_{x,y \in X} \Big(\operatorname{Re} \varphi(x) - i \cdot \operatorname{Im} \varphi(x) \Big) \cdot \varkappa(x, y) \cdot \Big(\operatorname{Re} \varphi(y) + i \cdot \operatorname{Im} \varphi(y) \Big) =$$

$$= \sum_{x,y \in X} \operatorname{Re} \varphi(x) \cdot \varkappa(x, y) \cdot \operatorname{Re} \varphi(y) + i \cdot \sum_{x,y \in X} \operatorname{Re} \varphi(x) \cdot \varkappa(x, y) \cdot \operatorname{Im} \varphi(y)$$

$$-i \cdot \sum_{x,y \in X} \operatorname{Im} \varphi(x) \cdot \varkappa(x, y) \cdot \operatorname{Re} \varphi(y) + \sum_{x,y \in X} \operatorname{Im} \varphi(x) \cdot \varkappa(x, y) \cdot \operatorname{Im} \varphi(y) \geqslant 0$$

car $\operatorname{Re} \varphi, \operatorname{Im} \varphi \in \mathbb{R}^{(X)}$ et

$$\sum_{x,y \in X} \operatorname{Re} \varphi(x) \cdot \varkappa(x, y) \cdot \operatorname{Im} \varphi(y) - \sum_{x,y \in X} \operatorname{Im} \varphi(x) \cdot \varkappa(x, y) \cdot \operatorname{Re} \varphi(y) = 0 \ ,$$

puisque $\varkappa(x, y) = \varkappa(y, x)$. □

REMARQUE 2 Un noyau $\varkappa : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que

$$\sum_{x,y \in X} \overline{\varphi(x)} \cdot \varkappa(x, y) \cdot \varphi(y) \geqslant 0 \ ,$$

pour tout $\varphi \in \mathbb{C}^{(X)}$ est automatiquement hermitien.

Cela découle des formules de polarisation d'une forme sesquilinéaire (cf. Analyse fonctionnelle [Por AF], proposition 1.3). □

A tout noyau $\varkappa : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$, que l'on considère comme une matrice $(\varkappa(x,y))_{x,y\in X}$, on associe l' *opérateur à noyau* ou simplement *noyau*

$$K : \mathbb{K}^{(X)} \longrightarrow \mathbb{K}^X : \varphi \longmapsto \sum_{y\in X} \varkappa(\diamond, y) \cdot \varphi(y) \ .$$

Les deux espaces vectoriels localement convexes $\mathbb{K}^{X\times X}$ et $L_s\left(\mathbb{K}^{(X)}, \mathbb{K}^X\right)$ sont isomorphes et, pour tout $x, y \in X$, on a

$$\varkappa(x,y) = \left\langle 1_{\{x\}} \middle| K 1_{\{y\}} \right\rangle \ .$$

L'application linéaire adjointe $K^\dagger : \mathbb{K}^{(X)} \longrightarrow \mathbb{K}^X$ est définie par

$$\left\langle \varphi \middle| K^\dagger \psi \right\rangle := \left\langle K\varphi \middle| \psi \right\rangle$$

et son noyau est $\varkappa^\dagger$, où

$$\varkappa^\dagger(x,y) := \overline{\varkappa(y,x)} \ ,$$

puisque

$$\sum_{x,y\in X} \overline{\varphi(x)} \cdot \varkappa^\dagger(x,y) \cdot \psi(y) = \left\langle \varphi \middle| K^\dagger \psi \right\rangle = \left\langle K\varphi \middle| \psi \right\rangle = \sum_{x\in X} \overline{\sum_{y\in X} \varkappa(x,y) \cdot \varphi(y)} \cdot \psi(x) =$$

$$= \sum_{x,y\in X} \overline{\varphi(x)} \cdot \overline{\varkappa(y,x)} \cdot \psi(y) \ .$$

Pour que $\varkappa \in \mathcal{TP}(X \times X)$, il faut et il suffit que que K soit hermitien et positif, i.e.

$$K = K^\dagger \qquad \text{et} \qquad \langle \varphi | K\varphi \rangle \geqslant 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathbb{K}^{(X)} \ .$$

On écrit $K \in L_+\left(\mathbb{K}^{(X)}, \mathbb{K}^X\right)$.

EXEMPLE 1 La matrice dont toutes les entrées sont constantes et positives, i.e. $\varkappa(x,y) = c \in \mathbb{R}_+$ pour tout $x, y \in X$, est de type positif.

Une matrice diagonale à entrée positive, i.e. $\varkappa(x,y) = \alpha_x \cdot \delta_{x,y}$ et $\alpha_x \geqslant 0$ pour tout $x, y \in X$, est de type positif.

REMARQUE 3 Cette situation purement algébrique entre dans le cadre des espaces localement convexes en munissant $\mathbb{K}^{(X)}$ de la topologie localement convexe la plus fine (cf. remarque 2.3). Comme toute application linéaire sur $\mathbb{K}^{(X)}$ est continue, nous écrirons $\mathcal{L}\left(\mathbb{K}^{(X)}, \mathbb{K}^X\right)$ à la place de $L\left(\mathbb{K}^{(X)}, \mathbb{K}^X\right)$.

REMARQUE 4 Si F est un espace localement convexe séparé et $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert plongé dans $F^\dagger$, le semi-dual (topologique) de F muni de sa topologie faible, alors $j : \mathcal{H}_\sigma \hookrightarrow F^\dagger$ est continue, donc aussi $j^\dagger : F \xrightarrow{\mathrm{Id}} F_\sigma \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma$ et $j^\dagger : F_\tau \longrightarrow \mathcal{H}$. L'application linéaire continue

$$h := jj^\dagger : F \xrightarrow{j^\dagger} \mathcal{H}_\sigma \xrightarrow{j} F^\dagger$$

s'appelle le *noyau* de $\mathcal{H}$; on a évidemment

$$h^\dagger = \left(jj^\dagger\right)^\dagger = jj^\dagger = h$$

et

$$\langle \varphi | h\varphi \rangle = \left(j^\dagger \varphi \middle| j^\dagger \varphi \right)_{\mathcal{H}} = \left\| j^\dagger \varphi \right\|_{\mathcal{H}}^2 \geqslant 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

Ceci montre que h est un noyau hermitien positif continu, nous écrirons $h \in \mathcal{L}_+ \left(F, F^\dagger\right)$, et que $\varphi \longmapsto \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}}$ est une semi-norme de Mackey sur F .

En outre pour tout $\varphi \in F$ et $\xi \in \mathcal{H}$, on a

$$\langle \varphi | \xi \rangle = \langle \varphi | j\xi \rangle = \left(j^\dagger \varphi \middle| \xi \right)_{\mathcal{H}} = (h\varphi | \xi)_{\mathcal{H}} \ ,$$

en identifiant $\mathcal{H}$ avec $j(\mathcal{H})$, c'est-à-dire en n'écrivant pas $j : \xi = j\xi$ et $j^\dagger \varphi = h\varphi$!

Réciproquement si $h \in \mathcal{L}\left(F, F^\dagger\right)$ est un noyau hermitien positif tel que $\varphi \longmapsto \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}}$ soit une semi-norme de Mackey sur F , alors $F / \operatorname{Ker} h$ est un espace préhilbertien pour le produit scalaire

$$(\varphi + \operatorname{Ker} h, \psi + \operatorname{Ker} h) \longmapsto \langle \varphi | h\psi \rangle$$

et si $\widehat{F / \operatorname{Ker} h}$ désigne l'espace hilbertien complété, l'application

$$\Psi : \varphi \longmapsto \varphi + \operatorname{Ker} h : F_\tau \longrightarrow \widehat{F / \operatorname{Ker} h}$$

est continue. Puisque $\Psi^\dagger$ est une application de $\widehat{F / \operatorname{Ker} h}$ dans $F^\dagger$, soit $\mathcal{H} := \Psi^\dagger \left(\widehat{F / \operatorname{Ker} h} \right) \hookrightarrow F^\dagger$, muni du produit scalaire transporté. Le noyau de ce sous-espace hilbertien est évidemment $\Psi^\dagger \Psi$ et il vient

$$\left\langle \varphi \middle| \Psi^\dagger \Psi \psi \right\rangle = (\Psi\varphi | \Psi\psi)_{\widehat{F / \operatorname{Ker} h}} = \langle \varphi | h\psi \rangle \ ,$$

donc $h = \Psi^\dagger \Psi$. Ainsi

THÉORÈME 1 (Laurent Schwartz) *Il y a correspondance biunivoque entre les sous-espaces hilbertiens $j : \mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ et les noyaux hermitiens positifs $h \in \mathcal{L}_+ \left(F, F^\dagger\right)$ tels que*

$$F \longrightarrow \mathbb{R} : \varphi \longmapsto \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}}$$

soit une semi-norme de Mackey par

$$h = jj^\dagger \qquad \text{et} \qquad \mathcal{H} = \Psi^\dagger \left(\widehat{F / \operatorname{Ker} h} \right) \ ,$$

où $\Psi : \varphi \longmapsto \varphi + \operatorname{Ker} h : F \longrightarrow \widehat{F / \operatorname{Ker} h}$. En outre

$$\langle \varphi | \xi \rangle = (h\varphi | \xi)_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \xi \in \mathcal{H} \, ;$$

on dit que c'est la propriété de reproduction *de h .*

REMARQUE 5 La théorie des sous-espaces hilbertiens à noyau reproduisant de Aronszajn-Smith est le cas particulier où $F = \mathbb{K}^{(X)}$, donc $F^\dagger = \mathbb{K}^X$. Ainsi si $\varkappa \in \mathcal{TP}(X \times X)$, il existe un sous-espace hilbertien $\mathcal{K} \hookrightarrow \mathbb{K}^X$ de noyau K . Pour tout $\xi \in \mathcal{K}$ et $x \in X$, on a $\varkappa(\cdot, x) = K1_{\{x\}} \in \mathcal{K}$ et la propriété de reproduction montre que

$$\xi(x) = \left\langle 1_{\{x\}} \middle| \xi \right\rangle = \left(K1_{\{x\}} \middle| \xi \right)_{\mathcal{K}} = (\varkappa(\cdot, x) | \xi)_{\mathcal{K}} \ .$$

Pour plus de détails consulter mon cours d'Analyse fonctionnelle [Por AF], § 5.15.

Définissons $\Xi_x := \varkappa(\cdot, x)$. Alors $(\Xi_x)_{x\in X} \subset \mathcal{K}$ et $\varkappa$ est la *matrice de Gram* associée à cette famille :

$$\varkappa(x,y) = (\Xi_x | \Xi_y) \quad \text{pour tout } x, y \in X$$

grâce à la propriété de reproduction. L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que

$$|\varkappa(x,y)|^2 \leqslant \varkappa(x,x) \cdot \varkappa(y,y) \ .$$

De même si $(\epsilon_j)_{j\in J}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{K}$, on a

$$\varkappa(\cdot,x) = \sum_{j\in J} (\epsilon_j | \varkappa(\cdot,x)) \cdot \epsilon_j = \sum_{j\in J} \overline{\epsilon_j(x)} \cdot \epsilon_j \quad \text{et} \quad (\epsilon_j(x))_{j\in J} \in \ell^2(J) \ ,$$

ainsi que

$$\varkappa(x,y) = (\varkappa(\cdot,x) | \varkappa(\cdot,y))_{\mathcal{K}} = \left(\sum_{k\in J} \overline{\epsilon_k(x)} \cdot \epsilon_k \middle| \sum_{l\in J} \overline{\epsilon_l(y)} \cdot \epsilon_l \right)_{\mathcal{K}} = \sum_{j\in J} \epsilon_j(x) \cdot \overline{\epsilon_j(y)}$$

pour tout $x, y \in X$, i.e.

$$K = \sum_{j\in J} |\epsilon_j\rangle \langle \epsilon_j|$$

en utilisant la notation de Dirac.

DÉFINITION 2 On dit que

$$\varkappa(x,y) = (\Xi_x | \Xi_y) = \sum_{j\in J} \epsilon_j(x) \cdot \overline{\epsilon_j(y)} \quad \text{pour tout } x, y \in X$$

sont les *représentations hilbertiennes* de $\varkappa$.

PROPOSITION *$\mathcal{TP}(X \times X)$ est un cône convexe fermé pointu dans $\mathbb{K}^{X\times X}$ et stable par conjugaison complexe et multiplication ponctuelle, i.e. pour $\varkappa, \lambda \in \mathcal{TP}(X \times X)$, on a*

$$\varkappa \circ \% \ , \ \overline{\varkappa} \ , \ \mathrm{Re}\, \varkappa \ \text{et} \ \varkappa \cdot \lambda \in \mathcal{TP}(X \times X) \ ,$$

où $\% : X \times X \longrightarrow X \times X : (x,y) \longmapsto (y,x)$.

Le fait que $\mathcal{TP}(X \times X)$ soit pointu découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puisque si $\varkappa \in -\mathcal{TP}(X \times X) \cap \mathcal{TP}(X \times X)$, pour tout $\varphi, \psi \in \mathbb{K}^{(X)}$, on a tout d'abord $\|K\varphi\|_{\mathcal{K}}^2 = \langle \varphi | K\varphi \rangle \gtrless 0$, donc $\langle \varphi | K\varphi \rangle = 0$, puis $|\langle \varphi | K\psi \rangle| \leqslant \|K\varphi\|_{\mathcal{K}} \cdot \|K\psi\|_{\mathcal{K}} = 0$, donc $K = 0$ et par suite $\varkappa = 0$.

Etant donné $\varkappa \in \mathcal{TP}(X \times X)$, il est clair que $\varkappa \circ \%$ est hermitien et, pour tout $\varphi \in \mathbb{K}^{(X)}$, on a

$$\sum_{x,y\in X} \overline{\varphi(x)} \cdot \varkappa(y,x) \cdot \varphi(y) = \sum_{x,y\in X} \overline{\overline{\varphi}(y)} \cdot \varkappa(y,x) \cdot \overline{\varphi}(x) \geqslant 0$$

puisque $\overline{\varphi} \in \mathbb{K}^{(X)}$. D'autre part $\overline{\varkappa} = \varkappa \circ \% \in \mathcal{TP}(X \times X)$, donc aussi $\mathrm{Re}\, \varkappa = \frac{1}{2} \cdot (\varkappa + \overline{\varkappa}) \in \mathcal{TP}(X \times X)$.

Etant donné $\varkappa, \lambda \in \mathcal{TP}(X \times X)$ et $\varphi \in \mathbb{K}^{(X)}$, en utilisant la seconde représentation hilbertienne de $\varkappa$, on obtient

$$\varkappa(x,y) \cdot \lambda(x,y) = \sum_{x,y\in X} \overline{\varphi(x)} \cdot \sum_{k\in J} \epsilon_k(x) \cdot \overline{\epsilon_l(y)} \cdot \lambda(x,y) \cdot \varphi(y) =$$

$$= \sum_{j\in J}\left(\sum_{x,y\in X}\overline{\overline{\epsilon_j(x)}\cdot\varphi(x)}\cdot\lambda(x,y)\cdot\overline{\epsilon_j(y)}\cdot\varphi(y)\right)\geqslant 0\ ,$$

puisque λ est de type positif, donc $\varkappa\cdot\lambda\in\mathcal{TP}(X\times X)$. □

REMARQUE 6 La stabilité par multiplication ponctuelle des matrices (de dimension finie!) a été démontrée par Schurr (1911).

COROLLAIRE 1 *Si $\varkappa : X\times X\longrightarrow\mathbb{K}$ et $\lambda : Y\times Y\longrightarrow\mathbb{K}$ sont des noyaux de type positif, alors*

$$\begin{array}{rcccccc}\varkappa\otimes\lambda\circ(2,3): & X\times Y\times X\times Y & \longrightarrow & X\times X\times Y\times Y & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ & ((x,y),(u,v)) & \longmapsto & ((x,u),(y,v)) & \longmapsto & \varkappa(x,u)\cdot\lambda(y,v)\end{array}$$

est un noyau de type positif.

C'est immédiat puisque

$$\varkappa\otimes\lambda\circ(2,3)=\varkappa\otimes 1\circ(2,3)\cdot 1\otimes\lambda\circ(2,3)$$

et $\varkappa\otimes 1\circ(2,3)$, $1\otimes\lambda\circ(2,3)$ sont trivialement de type positif. □

COROLLAIRE 2 *Si $\varkappa : X\times X\longrightarrow D_\rho$ est un noyau de type positif et $h : D_\rho\longrightarrow\mathbb{K}$ une fonction analytique telle que $h^{(k)}(0)\geqslant 0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, alors $h\circ\varkappa$ est un noyau de type positif.*

En effet pour tout $k\in\mathbb{N}$, le noyau $\varkappa^k$ est de type positif et en écrivant $h=\sum_{k\in\mathbb{N}}c_k\cdot\mathrm{id}^k$, il en est de même de $\sum_{j\in n}c_j\cdot\varkappa^j$, puisque les c_k sont $\geqslant 0$, donc aussi $h\circ\varkappa$ en passant à la limite. □

THÉORÈME 2 *Pour que $\varkappa\in\mathcal{TP}(X\times X)$ soit un générateur extrémal, i.e. $\mathbb{R}_+\cdot\varkappa$ est une génératrice extrémale de $\mathcal{TP}(X\times X)$, il faut et il suffit que $\varkappa$ soit de la forme*

$$\varkappa=|f\rangle\langle f| : (x,y)\longmapsto f(x)\cdot\overline{f(y)}\ ,$$

pour une fonction $f\in\mathbb{K}^X$.

La théorie des sous-espaces hilbertiens montre que pour $\varkappa,\lambda\in\mathcal{TP}(X\times X)$, on a

$$\varkappa\leqslant_{\mathcal{TP}(X\times X)}\lambda$$

si, et seulement si, $\mathcal{K}$ est un sous-espace hilbertien contenu dans $\mathcal{L}$ et ayant des normes plus grandes, i.e. $\mathcal{K}\hookrightarrow\mathcal{L}$ est de norme $\leqslant 1$. Remarquons que le noyau d'un sous-espace hilbertien de dimension 1 , donc de la forme $\mathbb{K}\cdot f$ pour un $f\in\mathbb{K}^X$ tel que $\|f\|_{\mathbb{K}\cdot f}=1$, est $|f\rangle\langle f|$: en effet pour tout $\varphi\in\mathbb{K}^{(X)}$ et $\alpha\in\mathbb{K}$, on a

$$(h\varphi|\,\alpha\cdot f)_{\mathbb{K}\cdot f}=\langle\varphi|\,\alpha\cdot f\rangle=\langle\varphi|\,f\rangle\cdot\alpha=\overline{\langle f|\,\varphi\rangle}\cdot\alpha=(\langle f|\,\varphi\rangle\cdot f|\,\alpha\cdot f)\ ,$$

donc $h\varphi=\langle f|\,\varphi\rangle\cdot f=|f\rangle\langle f|\,\varphi$. Un tel noyau est extrémal, car si $\lambda\in\mathcal{TP}(X\times X)$ est tel que $\lambda\leqslant_{\mathcal{TP}(X\times X)}|f\rangle\langle f|$, alors $\mathcal{L}\hookrightarrow\mathbb{K}\cdot f$ est aussi de dimension 1 , si $\mathcal{L}\neq\{0\}$; on a donc $\lambda=|g\rangle\langle g|$ pour un $g=\alpha\cdot f$ tel que $\alpha\in\mathbb{K}$ et $1=\|g\|_{\mathcal{L}}=|\alpha|\cdot\|f\|_{\mathcal{L}}\geqslant|\alpha|\cdot\|f\|_{\mathbb{K}\cdot f}=|\alpha|$, ce qui montre que $\lambda=|\alpha\cdot f\rangle\langle\alpha\cdot f|=|\alpha|^2\cdot|f\rangle\langle f|$. Réciproquement si $\mathcal{K}$ est extrémal, choisissons $f\in\mathcal{K}$ tel que $\|f\|_{\mathcal{K}} = 1$; il est clair que $\mathbb{K} \cdot f \hookrightarrow \mathcal{K}$ est de norme $\leqslant 1$, donc $|f\rangle \langle f| \leqslant_{\mathcal{TP}(X \times X)} \varkappa$, et par suite $|f\rangle \langle f| = \alpha \cdot \varkappa$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}_+$ par extrémalité. Pour tout $\varphi \in \mathbb{K}^{(X)}$, il vient

$$\alpha \cdot \langle \varphi | f \rangle = (\alpha \cdot K\varphi | f)_{\mathcal{K}} = \Big(|f\rangle \langle f| \varphi \Big| f \Big)_{\mathcal{K}} = \overline{\langle f | \varphi \rangle} \cdot (f | f)_{\mathcal{K}} = \langle \varphi | f \rangle \ ,$$

donc $\alpha = 1$. □

EXEMPLE 2 Sur l'ensemble à deux éléments $2 = \{0, 1\}$, l'ensemble $\mathcal{TP}(2 \times 2)$ des noyaux de type positif est formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & c \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$ telles que

$$a \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & c \end{pmatrix} = ac - |b|^2 \geqslant 0 \ .$$

On a évidemment $c \geqslant 0$. Les générateurs extrémaux de $\mathcal{TP}(2 \times 2)$ sont donc de la forme

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{v} & \overline{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |v|^2 & v\overline{w} \\ w\overline{v} & |w|^2 \end{pmatrix} \ ,$$

donc tels que

$$a \geqslant 0 \quad \text{et} \quad ac - |b|^2 = 0 \ .$$

En effet, pour tout $v, w \in \mathbb{K}$, on doit avoir

$$0 \leqslant \begin{pmatrix} \overline{v} & \overline{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{v} & \overline{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cdot v + b \cdot w \\ \overline{b} \cdot v + c \cdot w \end{pmatrix} =$$

$$= a \cdot \overline{v}v + b \cdot \overline{v}w + \overline{b} \cdot \overline{w}v + c \cdot \overline{w}w \ ;$$

mais si $a = 0$, on a $b \cdot \overline{v} + \overline{b} \cdot v + c \cdot w \geqslant 0$ pour tout $v \in \mathbb{K}$ et $w \in \mathbb{R}_+^*$, donc aussi pour $w = 0$ en passant à la limite. On en déduit $b = 0$, en choisissant $v = \pm 1$ et en plus $v = \pm i$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, puis $c \geqslant 0$ avec $w = 1$. Si $a \neq 0$, on doit avoir

$$a \cdot \overline{v}v + b \cdot \overline{v}w + \overline{b} \cdot \overline{w}v + c \cdot \overline{w}w = \frac{1}{a} \cdot \left[|a \cdot v + b \cdot w|^2 + \left(ac - |b|^2\right) \cdot |w|^2 \right] \geqslant 0$$

pour tout $v, w \in \mathbb{K}$, donc $a \geqslant 0$ avec $w = 0$, puis $ac - |b|^2 \geqslant 0$ avec $v = -\frac{b}{a}$ et $w = 1$. Les conditions a , $ac - |b|^2 \geqslant 0$ sont donc satisfaites dans les deux cas. La réciproque est immédiate. □

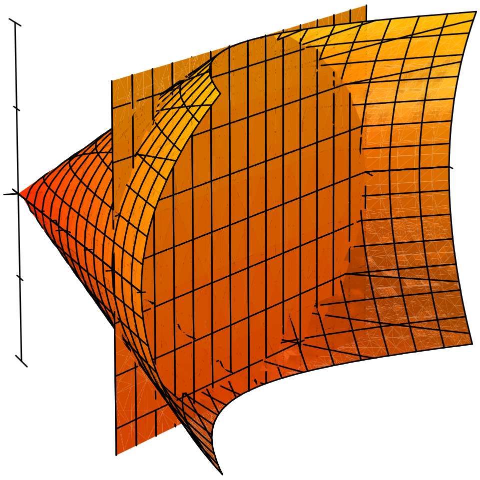
Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on obtient

$$\mathcal{TP}(2 \times 2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \ \middle| \ a \geqslant 0 \text{ et } b^2 \leqslant ac \right\} \cong$$

$$\cong \left\{ \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ a \geqslant 0 \text{ et } b^2 \leqslant ac \right\} ;$$

les générateurs extrémaux sont donc de la forme

$$\begin{pmatrix} a & \sqrt{ac} \\ \sqrt{ac} & c \end{pmatrix} \qquad \text{pour } a, c \geqslant 0 \ .$$



Les symétries de cet ensemble conduisent, si $(e_j)_{j\in 3}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$, à introduire la base

$$\epsilon_0 := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e_2 \quad , \quad \epsilon_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (e_0 - e_1) \quad , \quad \epsilon_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (e_0 + e_1) \ .$$

Remarquer que la base de ce cône n'est pas circulaire. Elle le serait si nous avions considéré les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \cdot a & b \\ \overline{b} & \sqrt{2} \cdot c \end{pmatrix}$ et par suite les conditions $a \geqslant 0$ et $2ac - |b|^2 \geqslant 0$. C'est la raison pour laquelle nous avons introduit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dans la définition de ϵ_0 . Ce changement de base n'est donc pas orthogonal.

Soit $(x_j)_{j\in 3}$ les coordonnées dans cette nouvelle base. La matrice de l'application linéaire A telle que $Ae_j = \epsilon_j$ est

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

donc

$$\begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} .$$

Ainsi $b^2 \leqslant ac$ est équivalent à

$$\frac{1}{2} \cdot x_0^2 \leqslant \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-x_1 + x_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_2^2 - x_1^2\right) \ ,$$

i.e. à $x_0^2 + x_1^2 \leqslant x_2^2$. On a d'autre part $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (a + d) \geqslant 0$ si a , donc c est $\geqslant 0$; réciproquement si $x_2 \geqslant 0$, on a $|x_1| \leqslant x_2$, donc $a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x_1 + x_2) \geqslant 0$. Ainsi

$$\mathcal{TP}\,(2 \times 2) \cong \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ x_2 \geqslant 0 \text{ et } x_0^2 + x_1^2 \leqslant x_2^2 \right\} .$$

Rappelons le résultat d'algèbre linéaire que nous avons utilisé : si $(e_j)_{j\in n}$ et $(\epsilon_j)_{j\in n}$ sont des bases de $\mathbb{R}^n$, $(x_j)_{j\in n}$, $(y_j)_{j\in n}$ les coordonnées respectives et $(a_{k,l})_{k,l\in n}$ la matrice dans $(e_j)_{j\in n}$

de l'application linéaire A telle que $Ae_j = \epsilon_j$, alors

$$\sum_{k \in n} x_k \cdot e_k = \sum_{l \in n} y_l \cdot \epsilon_l = \sum_{l \in n} y_l \cdot Ae_l = \sum_{l \in n} y_l \cdot \left(\sum_{k \in n} a_{k,l} \cdot e_k \right) = \sum_{k \in n} \left(\sum_{l \in n} a_{k,l} \cdot y_l \right) \cdot e_k \ ,$$

donc $x_k = \sum_{l \in n} a_{k,l} \cdot y_l$.

REMARQUE 7 La seconde représentation hilbertienne d'un noyau peut être interprétée comme une représentation intégrale à l'aide de générateurs extrémaux. Une telle représentation n'est évidemment intéressante que si elle satisfait à d'autres propriétés, par exemple de diagonaliser un opérateur dans $\mathcal{K}$ (théorème spectral).

2.5 Fonctions relativement de type positif

DÉFINITION Soient X un ensemble et $\varkappa : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ un noyau. On dit que $\varkappa$ est *relativement de type positif* , si $\varkappa$ est hermitien et si

$$\sum_{x,y \in X} \overline{\varphi(x)} \cdot \varkappa(x,y) \cdot \varphi(y) \geqslant 0 \ ,$$

pour tout $\varphi \in \mathbb{K}^{(X)}$ tel que $\sum_{x \in X} \varphi(x) = 0$.

Classiquement on dit que $-\varkappa$ est de *type négatif* si $\varkappa$ est relativement de type positif.

Nous désignerons par $\mathcal{RTP}(X \times X)$ l'ensemble formé des noyaux relativement de type positif.

PROPOSITION 1 *$\mathcal{RTP}(X \times X)$ est un cône convexe fermé dans $\mathbb{K}^{X \times X}$ et*

$$\mathcal{TP}(X \times X) \subset \mathcal{RTP}(X \times X) \ .$$

C'est évident. □

EXEMPLE 1 Un noyau réel constant, i.e. une matrice dont toutes les entrées sont constantes et réelles : $\varkappa(x,y) = c \in \mathbb{R}$ pour tout $x, y \in X$, est relativement de type positif.

Rappelons qu'il n'est de type positif que s'il est positif, i.e. $c \geqslant 0$ (cf. exemple 2.4.1).

EXEMPLE 2 Si $f \in \mathbb{K}^X$, alors le noyau

$$|f\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle f| : (x,y) \longmapsto f(x) + \overline{f(y)}$$

est relativement de type positif.

En effet, ce noyau est hermitien et, pour tout $\varphi \in \mathbb{K}^{(X)}$ tel que $\sum_{x \in X} \varphi(x) = 0$, il vient

$$\sum_{x,y \in X} \overline{\varphi(x)} \cdot \left(f(x) + \overline{f(y)}\right) \cdot \varphi(y) =$$

$$= \left(\sum_{x \in X} \overline{\varphi(x)} \cdot f(x)\right) \cdot \left(\sum_{y \in X} \varphi(y)\right) + \left(\sum_{x \in X} \overline{\varphi(x)}\right) \cdot \left(\sum_{y \in X} \overline{f(y)} \cdot \varphi(y)\right) = 0 \ .$$

□

EXEMPLE 3 Soit $\Phi : X \longrightarrow \mathcal{H}$ une application dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors

$$(x,y) \longmapsto -\left\|\Phi(x) - \Phi(y)\right\|^2$$

est relativement de type positif et elle s'annule sur la diagonale de $X \times X$. C'est l'exemple historique de Isaac Schoenberg [Sch 1938b], caractérisant les métriques hilbertiennes, ayant conduit à la notion de fonction de type négatif, évidemment sans le signe $-$!

En effet, pour tout $\varphi \in \mathbb{K}^{(X)}$ tel que $\sum_{x\in X} \varphi(x) = 0$, il vient

$$-\sum_{x,y\in X} \overline{\varphi(x)} \cdot \|\Phi(x) - \Phi(y)\|^2 \cdot \varphi(y) =$$

$$= -\sum_{x,y\in X} \overline{\varphi(x)} \cdot \left(\|\Phi(x)\|^2 - (\Phi(x)|\, \Phi(y)) - (\Phi(y)|\, \Phi(x)) + \|\Phi(y)\|^2\right) \cdot \varphi(y) =$$

$$= \left(\sum_{x\in X} \varphi(x) \cdot \Phi(x) \middle| \sum_{y\in X} \varphi(y) \cdot \Phi(y)\right) + \left(\sum_{y\in X} \overline{\varphi(y)} \cdot \Phi(y) \middle| \sum_{x\in X} \overline{\varphi(x)} \cdot \Phi(x)\right) =$$

$$= \left\|\sum_{x\in X} \varphi(x) \cdot \Phi(x)\right\|^2 + \left\|\sum_{x\in X} \overline{\varphi(x)} \cdot \Phi(x)\right\|^2 \geqslant 0 \ .$$

□

Soit $F = \operatorname{Ker} \langle \cdot |\, 1\rangle = \left\{\varphi \in \mathbb{K}^{(X)} \;\middle|\; \sum_{x\in X} \varphi(x) = 0\right\} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{K}^{(X)}$. Le dual de F s'identifie aux restrictions des formes linéaires (continues) sur $\mathbb{K}^{(X)}$ à F :

$$\iota^\dagger : \mathbb{K}^X \longrightarrow F^\dagger : \mu \longmapsto \mu_{|F} \ ,$$

donc permet d'identifier $F^\dagger$ à $\mathbb{K}^X / \mathbb{K} \cdot 1$. Remarquons que

$$\langle \varphi |\, f\rangle = \sum_{x\in X} \overline{\varphi(x)} \cdot f(x) = \int \overline{\varphi} \cdot f \, d\# \ ,$$

montrant que $\mathbb{K}^X$ s'identifie à $\left(\mathbb{K}^{(X)}\right)^\dagger$ grâce à $f \longmapsto |f \cdot \#\rangle$.

Si K désigne le noyau associé à $\varkappa$, soit

$$\dot{K} : F \longrightarrow F^\dagger : \varphi \longmapsto (K\varphi)_{|F} \ .$$

Il est alors clair, puisque

$$\left\langle \psi \middle| \dot{K}\varphi \right\rangle = \langle \psi |\, K\varphi\rangle \quad \text{pour tout } \psi, \varphi \in F \ ,$$

que $\varkappa$ est relativement de type positif si, et seulement si, $\dot{K}$ est positif, i.e. $\dot{K}$ est hermitien et $\left\langle \varphi |\, \dot{K}\varphi \right\rangle \geqslant 0$ pour tout $\varphi \in F$.

Etant donné $\theta \in \mathbb{K}^{(X)} \smallsetminus F$ tel que $\langle \theta |\, 1\rangle = 1$, par exemple $1_{\{\xi\}}$ pour un $\xi \in X$, la décomposition $\mathbb{K}^{(X)} = F \oplus \mathbb{K} \cdot \theta$ fournit une projection canonique

$$p : \mathbb{K}^{(X)} \longrightarrow F : \varphi + \alpha \cdot \theta \longmapsto \varphi \ ,$$

dont l'adjointe $p^\dagger$ est l'application de prolongement de $\nu \in F^\dagger$ en la forme semi-linéaire $p^\dagger\nu$ sur $\mathbb{K}^X$ s'annulant sur θ : $\left\langle \theta \middle| p^\dagger \nu \right\rangle = \langle p\theta |\, \nu\rangle = 0$.

Puisque $|\theta\rangle \langle 1|\, \varphi = \langle 1|\, \varphi\rangle \cdot \theta = 0$ et $|\theta\rangle \langle 1|\, \theta = \langle 1|\, \theta\rangle \cdot \theta = \theta$, on a $\varphi = (\mathrm{Id} - |\theta\rangle \langle 1|)(\varphi + \alpha \cdot \theta)$ et, pour tout $\mu \in \mathbb{K}^X$,

$$\left\langle \varphi + \alpha \cdot \theta \middle| (\mathrm{Id} - |1\rangle \langle \theta|)\, \mu \right\rangle = \left\langle (\mathrm{Id} - |1\rangle \langle \theta|)^\dagger (\varphi + \alpha \cdot \theta) \middle| \mu \right\rangle =$$

$$= \left\langle (\mathrm{Id} - |\theta\rangle \langle 1|)(\varphi + \alpha \cdot \theta) \middle| \mu \right\rangle = \langle \varphi |\, \mu\rangle = \left\langle \varphi + \alpha \cdot \theta \middle| p^\dagger \mu_{|F} \right\rangle \ ,$$

i.e. $p^\dagger \iota^\dagger \mu = p^\dagger \mu_{|F} = (\mathrm{Id} - |1\rangle \langle\theta|)\, \mu$, ce qui conduit au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^{(X)} \arrow[rr, "\mathrm{Id}-|\theta\rangle\langle 1|"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathbb{K}^{(X)} \arrow[rr, "K"] & & \mathbb{K}^{X} \arrow[rr, "\mathrm{Id}-|1\rangle\langle\theta|"] \arrow[dr, "\iota^\dagger"'] & & \mathbb{K}^{X} \\
& F \arrow[ur, "\iota"'] \arrow[rrrr, "\dot{K}"'] & & & & F^\dagger \arrow[ur, "p^\dagger"'] &
\end{tikzcd}$$

Le noyau $\widetilde{K} := (\mathrm{Id} - |1\rangle\langle\theta|)\, K\, (\mathrm{Id} - |\theta\rangle\langle 1|) : \mathbb{K}^{(X)} \longrightarrow \mathbb{K}^X$ satisfait à

$$\left\langle \psi + \beta\cdot\theta \middle| \widetilde{K}\,(\varphi + \alpha\cdot\theta) \right\rangle = \left\langle \psi \middle| \dot{K}\varphi \right\rangle \quad \text{pour tout } \varphi, \psi \in F \ ,$$

donc $\varkappa$ est relativement de type positif si, et seulement si, $\widetilde{K}$ est positif.

Remarquons que la matrice de $\mathrm{Id} - |\theta\rangle\langle 1| : \mathbb{K}^{(X)} \longrightarrow \mathbb{K}^{(X)}$ est

$$(x,y) \longmapsto \left\langle 1_{\{x\}} \middle| (\mathrm{Id} - |\theta\rangle\langle 1|)\, 1_{\{y\}} \right\rangle = \delta_{x,y} - \theta(x) \ .$$

La matrice de $\mathrm{Id} - |1\rangle\langle\theta|$, mais attention dans la base topologique $\left(1_{\{x\}}\right)_{x\in X}$ de $\mathbb{K}^X$ est

$$(x,y) \longmapsto \left\langle 1_{\{x\}} \middle| (\mathrm{Id} - |1\rangle\langle\theta|)\, 1_{\{y\}} \right\rangle = \delta_{x,y} - \overline{\theta(y)} \ :$$

pour tout $\mu \in \mathbb{K}^X$, on a $\mu = \sum_{x\in X} \mu(x)\cdot 1_{\{x\}}$ ponctuellement !

Lorsque $\theta = 1_{\{\xi\}}$, le noyau de $\widetilde{K}$ est

$$\left(\widetilde{\varkappa}(x,y)\right)_{x,y\in X} = \left(\delta_{x,y} - \delta_{\xi,y}\right)_{x,y\in X} \left(\varkappa(x,y)\right)_{x,y\in X} \left(\delta_{x,y} - \delta_{x,\xi}\right)_{x,y\in X} =$$

$$= \left(\delta_{x,y} - \delta_{\xi,y}\right)_{x,y\in X} \left(\varkappa(x,y) - \varkappa(x,\xi)\right)_{x,y\in X} =$$

$$= \left(\varkappa(x,y) - \varkappa(x,\xi) - \varkappa(\xi,y) + \varkappa(\xi,\xi)\right)_{x,y\in X} \ .$$

PROPOSITION 2 *Soient $\varkappa$ un noyau et $\xi \in X$.*

(i) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *$\varkappa$ est relativement de type positif.*

(b) *Le noyau*

$$\widetilde{\varkappa} : (x,y) \longmapsto \varkappa(x,y) - \varkappa(x,\xi) - \varkappa(\xi,y) + \varkappa(\xi,\xi)$$

est de type positif.

(c) *Le noyau*

$$\widehat{\varkappa} : (x,y) \longmapsto \varkappa(x,y) - \varkappa(x,\xi) - \varkappa(\xi,y)$$

est relativement de type positif.

(ii) *Si $\widehat{\varkappa}$ est de type positif, alors $\varkappa$ est relativement de type positif. La réciproque est vraie si $\varkappa(\xi,\xi) \leqslant 0$.*

(iii) *Si $\varkappa$ est relativement de type positif, alors*

$$\varkappa = c + \Big(|f\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle f|\Big) + \widetilde{\varkappa} \ ,$$

où $c = \varkappa(\xi,\xi)$ et $f = \varkappa(\cdot,\xi) - \varkappa(\xi,\xi)$. Remarquons que $f(\xi) = \widetilde{\varkappa}(\xi,\xi) = 0$.

Démonstration de (i) L'équivalence (a)$\Leftrightarrow$(b) découle de ce qui précède. Comme $\widetilde{\varkappa} = \widetilde{\lambda}$:

$$\widetilde{\widetilde{\varkappa}}(x,y) = \left\{ \begin{array}{c} \varkappa(x,y) - \varkappa(x,\xi) - \varkappa(\xi,y) \\ -\varkappa(x,\xi) + \varkappa(x,\xi) + \varkappa(\xi,\xi) \\ -\varkappa(\xi,y) + \varkappa(\xi,\xi) + \varkappa(\xi,y) \\ +\varkappa(\xi,\xi) - \varkappa(\xi,\xi) - \varkappa(\xi,\xi) \end{array} \right\} = \widetilde{\varkappa}(x,y) \ ,$$

on en déduit (b)$\Leftrightarrow$(c) .

Démonstration de (ii) Si $\widehat{\varkappa}$ est de type positif, alors $\widehat{\varkappa}$ est relativement de type positif, donc aussi $\varkappa$. La réciproque est vraie si $\varkappa(\xi,\xi) \leqslant 0$, puisque $\widetilde{\varkappa} - \varkappa(\xi,\xi)$ est de type positif (exemple 2.4).

Démonstration de (iii) C'est immédiat. $\square$

Un noyau relativement de type positif possède aussi une représentation hilbertienne et il est tout a fait naturel, pour tout $x \in X$, de poser

$$\Xi_x := \widetilde{\varkappa}(\cdot,x) = \varkappa(\cdot,x) - \varkappa(\cdot,\xi) - \varkappa(\xi,x) + \varkappa(\xi,\xi) \in \widetilde{\mathcal{K}} \ .$$

Par la propriété de reproduction on a

$$(\Xi_x | \Xi_y)_{\widetilde{\mathcal{K}}} = \widetilde{\varkappa}(x,y) = \varkappa(x,y) - \varkappa(x,\xi) - \varkappa(\xi,y) + \varkappa(\xi,\xi) \ .$$

Il vient alors

$$-\left\|\Xi_x - \Xi_y\right\|_{\widetilde{\mathcal{K}}}^2 = -(\Xi_x | \Xi_x)_{\widetilde{\mathcal{K}}} + (\Xi_x | \Xi_y)_{\widetilde{\mathcal{K}}} + (\Xi_y | \Xi_x)_{\widetilde{\mathcal{K}}} - (\Xi_y | \Xi_y)_{\widetilde{\mathcal{K}}} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} -\varkappa(x,x) + \varkappa(x,\xi) + \varkappa(\xi,x) - \varkappa(\xi,\xi) \\ +\varkappa(x,y) - \varkappa(x,\xi) - \varkappa(\xi,y) + \varkappa(\xi,\xi) \\ +\varkappa(y,x) - \varkappa(y,\xi) - \varkappa(\xi,x) + \varkappa(\xi,\xi) \\ -\varkappa(y,y) + \varkappa(y,\xi) + \varkappa(\xi,y) - \varkappa(\xi,\xi) \end{array} \right\} = \varkappa(x,y) + \varkappa(y,x) - \varkappa(x,x) - \varkappa(y,y) \ ,$$

donc

$$2\,\mathrm{Re}\,\varkappa(x,y) = \varkappa(x,x) + \varkappa(y,y) - \left\|\Xi_x - \Xi_y\right\|_{\widetilde{\mathcal{K}}}^2 \ .$$

COROLLAIRE (Théorème de Schoenberg [Sch 1938b]**)**

Pour qu'un espace métrique (X,d) soit isométriquement plongeable dans un espace de Hilbert, il faut et il suffit que $-d^2$ soit relativement de type positif.

Soit $\Xi : X \longrightarrow \mathcal{H}$ un plongement isométrique de (X,d) , i.e. $d(x,y) = \|\Xi_x - \Xi_y\|$ pour tout $x,y \in X$. L'exemple 3 ci-dessus montre que $-d^2$ est relativement de type positif. Réciproquement, puisque d est réel et s'annule sur la diagonale, la formule ci-dessus s'écrit

$$d(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left\|\Xi_x - \Xi_y\right\|_{\widetilde{\mathcal{K}}} \ ,$$

donc $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \Xi : X \longrightarrow \widetilde{\mathcal{K}}$ est un plongement isométrique. $\square$

THÉORÈME *Pour qu'un noyau $\varkappa$ soit relativement de type négatif, il faut et il suffit que $e^{u \cdot \varkappa}$ soit de type positif pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$.*

Si $e^{u\cdot\varkappa}$ est de type positif, alors $e^{u\cdot\varkappa}-1$ est relativement de type positif par la proposition 1 et l'exemple 1 et il en est de même de la limite ponctuelle

$$\varkappa = \lim_{t\to 0} \frac{e^{u\cdot\varkappa}-1}{u} \; .$$

Réciproquement si $\varkappa$ est relativement de type négatif, il en est de même de $u\cdot\varkappa$. Il nous suffit donc de montrer que $e^{\varkappa}$ est de type positif. D'après la proposition (i), on a

$$\varkappa = \widetilde{\varkappa} + \varkappa(\diamond,\xi) + \varkappa(\xi,\diamond) - \varkappa(\xi,\xi) = \widetilde{\varkappa} + \varkappa(\diamond,\xi) + \overline{\varkappa(\diamond,\xi)} - \varkappa(\xi,\xi)$$

et $\widetilde{\varkappa}$ est de type positif. Ainsi

$$e^{\varkappa} = e^{\widetilde{\varkappa}} \cdot e^{\varkappa(\diamond,\xi)} \cdot \overline{e^{\varkappa(\diamond,\xi)}} \cdot e^{-\varkappa(\xi,\xi)}$$

est de type positif comme produit de fonctions de type positif (proposition 2.4) : $e^{\widetilde{\varkappa}}$ est de type positif par le corollaire 2.4.2, tandis que $e^{\varkappa(\diamond,\xi)}\cdot\overline{e^{\varkappa(\diamond,\xi)}}$ l'est par le théorème 2.4.2. $\square$

2.6 Fonctions de type positif exponentiellement bornées sur un monoïde involutif

DÉFINITION 1 Soit F un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(a) Une *involution* $\varphi \longmapsto \varphi^*$ sur F est une application semi-linéaire telle que $\varphi^{**} = \varphi$ pour tout $\varphi \in F$. On dit que φ est *hermitien* si $\varphi^* = \varphi$ et *anti-hermitien* si $\varphi^* = -\varphi$.

Nous désignerons par F_h et F_{-h} les espaces vectoriels réels formés des éléments hermitiens et respectivement anti-hermitiens.

(b) On muni le semi-dual algébrique $F^{\circledast}$ de l'involution adjointe définie par

$$\langle \varphi \,| \mu^* \rangle = \overline{\langle \varphi^* | \, \mu \rangle} \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \mu \in F^{\dagger} \ .$$

(c) Si une involution $a \longmapsto a^*$ sur une algèbre $\mathcal{A}$ satisfait en plus à $(ab)^* = b^* a^*$ pour tout $a, b \in \mathcal{A}$, on dit que $\mathcal{A}$ est une *algèbre involutive* .

(d) Si X est un ensemble muni d'une involution $\diamond^*$, on définit une involution $f \longmapsto f^*$sur $\mathbb{K}^X$ en posant

$$f^*(x) := \overline{f(x^*)} \quad \text{pour tout } x \in X \ ,$$

Puisque $F_h \cap F_{-h} = \{0\}$ et $\varphi = \frac{1}{2} \cdot (\varphi + \varphi^*) + \frac{1}{2} \cdot (\varphi - \varphi^*)$, on a

$$F = F_h \oplus_{\mathbb{R}} F_{-h} \ .$$

Dans le cas complexe, si φ est anti-hermitien, alors $\frac{1}{i} \cdot \varphi$ est hermitien, donc $F_{-h} = i \cdot F_h$; dans le cas réel, pour hermitien et anti-hermitien, on préfère dire *symétrique* et *anti-symétrique* , ou bien *pair* et *impair* , suivant les cas.

Une fonction f sur X est donc hermitienne , i.e. $f = f^*$ si, et seulement si on a

$$f(x^*) = \overline{f(x)} \quad \text{pour tout } x \in X \ .$$

REMARQUE 1 Si l'involution est l'identité id_X , les fonctions hermitiennes f sont les fonctions réelles puisque $f(x) = \overline{f(x)}$, ce qui nous permet de supposer que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la condition $f = f^*$, i.e. $f(x) = f(x^*)$ pour tout $x \in X$, est une condition à placer dans un cadre plus général d'invariance par un groupe de transformations dans X . En outre l'ensemble de ces fonctions, si l'involution n'est pas l'identité, ne sépare plus les points de X , ce qui est particulièrement génant pour ce qui suit.

Remarquons qu'un monoïde est involutif pour l'identité si, et seulement si, il est commutatif.

Nous ferons donc les hypothèses suivantes :

Dans les paragraphes qui suivent :
$G = (G, \diamond^*)$ **est un monoïde involutif**
dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ l'involution n'est pas l'identité,
dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ l'involution est l'identité.

REMARQUE 2 Dans ce chapitre nous ne considérons pas de topologie sur G , à l'exception des exemples où cela est souvent utile. Le cas topologique sera envisagé dans le chapitre suivant et on retrouve le cas présent en munissant G de la topologie discrète.

Si G n'est pas commutatif, donc $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il nous faudrait tenir compte de la théorie des représentations dans un espace de Hilbert. Ces considérations ferait sauter le cadre de ce cours ; toutefois nous ne supposerons pas que G est commutatif et nous écrirons tout ce qui est possible sans cette hypothèse, pour bien montrer où celle-ci est importante, en utilisant la notation multiplicative.

DÉFINITION 2 Si G est un monoïde involutif quelconque, on dit qu'une fonction $f : G \longrightarrow \mathbb{K}$ est de *type positif* si le noyau

$$\varkappa_f : (s,t) \longmapsto f(t^* s)$$

est de type positif.

Il est clair que $\varkappa_f$ est hermitien si, et seulement si, f est hermitienne, puisque $f(t^* s) = f((s^* t)^*)$.

REMARQUE 3 On vérifie facilement que l'ensemble $\mathcal{TP}(G)$ formé des fonctions de type positif est un cône convexe fermé involutif dans $\mathbb{K}^G$ stable par multiplication ponctuelle.

Avec nos hypothèses et en tenant compte de la remarque 2.4.2, une fonction $f : G \longrightarrow \mathbb{K}$ est de type positif si, et seulement si, pour tout $\varphi \in \mathbb{K}^{(G)}$, on a

$$\sum_{s,t \in G} \overline{\varphi(s)} \cdot f(t^* s) \cdot \varphi(t) \geqslant 0 \ .$$

REMARQUE 4 L'application $\mathcal{TP}(G) \longrightarrow \mathcal{TP}(G \times G) : f \longmapsto \varkappa_f$ est évidemment injective, ce qui nous permet d'identifier $\mathcal{TP}(G)$ à un sous-cône convexe de $\mathcal{TP}(G \times G)$, puisqu'elle est additive et positivement homogène. $\mathcal{TP}(G)$ est en particulier pointu (proposition 2.4), mais cela découle aussi (c'est le même argument) du lemme 1 ci-dessus.

Que peut-on dire de l'image de $\mathcal{TP}(G)$ dans $\mathcal{TP}(G \times G)$?

EXEMPLE 1 Considérons le groupe à deux éléments $2 = \{0,1\} \cong \mathbb{Z}/2 \cdot \mathbb{Z}$, muni de l'involution $\mathrm{id}_2 : s \longmapsto -s = s$! A toute fonction $f \in \mathbb{K}^2$, on associe le noyau

$$\begin{pmatrix} f(0) & f(1) \\ f(1) & f(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2 \times 2} \ .$$

Il est hermitien si, et seulement si, f est réelle, et de type positif si en plus $f(0) \geqslant 0$ et $f(1)^2 \leqslant f(0)^2$, i.e. $-f(0) \leqslant f(1) \leqslant f(0)$.

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, rappelons que

$$\mathcal{TP}(2 \times 2) \cong \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ x_2 \geqslant 0 \text{ et } x_0^2 + x_1^2 \leqslant x_2^2 \right\}$$

(cf. exemple 2.4.2), tandis que

$$\mathcal{TP}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \ \middle| \ a \geqslant 0 \text{ et } -a \leqslant b \leqslant a \right\} \cong$$

$$\cong \left\{ \left(\begin{array}{c} x_0 \\ 0 \\ x_2 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_2 \geqslant 0 \text{ et } |x_0| \leqslant x_2 \right\} ;$$

ce n'est pas une face de $\mathcal{TP}(2 \times 2)$, bien que les générateurs extrémaux de $\mathcal{TP}(2)$ soient aussi des générateurs extrémaux de $\mathcal{TP}(2 \times 2)$! Nous verrons ci-dessous (cf. théorème 2.6.iii) que c'est vrai en général lorsque G est commutatif.

LEMME 1

(i) Pour tout $f \in \mathcal{TP}(G)$ et $s, t \in G$, on a

$$f(s^*s) \geqslant 0$$

et

$$|f(t^*s)|^2 \leqslant f(s^*s) \cdot f(t^*t) \ .$$

En particulier

$$|f(s)|^2 \leqslant f(e) \cdot f(s^*s) \quad \textit{pour tout } s \in G \ ,$$

et si $f(e) = 0$, alors $f = 0$.

(ii) L'ensemble $\mathcal{TP}^1(G)$ des fonctions de type positif $f \in \mathcal{TP}(G)$ telles que

$$f(e) = \left\langle 1_{\{e\}} \middle| f \right\rangle = 1$$

est un ensemble convexe fermé de $\mathcal{TP}(G)$, c'est une base de $\mathcal{TP}(G)$, i.e. $\mathcal{TP}(G) = \mathbb{R}_+ \cdot \mathcal{TP}^1(G)$ et

$$\mathrm{Sp}^h G \subset Ch\left(\mathcal{TP}^1(G)\right) \ .$$

(iii) Si G est un groupe muni de l'involution $\diamond^{-1}$, alors

$$|f(s)| \leqslant f(e)$$

pour tout $f \in \mathcal{TP}(G)$ et $s \in G$.

Démonstration de (i) En effet

$$f(s^*s) = \varkappa(s, s)$$

et

$$|f(t^*s)|^2 = |\varkappa_f(s,t)|^2 \leqslant \varkappa_f(s,s) \cdot \varkappa_f(t,t) = f(s^*s) \cdot f(t^*t) \ ,$$

par le lemme 2.4 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Démonstration de (ii) La première partie est évidente puisque $\mathcal{TP}^1(G)$ est défini par des conditions ponctuelles. C'est une base de $\mathcal{TP}(G)$ car si $f(0) = 0$, alors $f = 0$, par le lemme et si $f(0) \neq 0$, alors $\frac{f}{f(0)} \in \mathcal{TP}^1(G)$. L'inclusion $\mathrm{Sp}^h G \subset \mathcal{TP}(G)$ est une conséquence du théorème 2.4.2, puisque pour $\chi \in \mathrm{Sp}^h G$ on a $\varkappa_\chi = |\chi\rangle\langle\chi|$: en effet pour tout $s, t \in G$, on obtient

$$\varkappa_\chi(s,t) = \chi(t^*s) = \chi(s) \cdot \overline{\chi(t)} = |\chi\rangle\langle\chi|(s,t) \ .$$

Ce même théorème montre que $\varkappa_\chi = |\chi\rangle\langle\chi|$ est un générateur extrémal de $\mathcal{TP}(G \times G)$; il en est donc de même de χ dans $\mathcal{TP}(G)$; en tenant compte du lemme 2.2.1 on obtient $\mathrm{Sp}^h G \subset Ch\left(\mathcal{TP}^1(G)\right)$.

Démonstration de (iii) C'est immédiat par (i). □

DÉFINITION 3 Pour tout $\varphi, \psi \in \mathbb{K}^{(G)}$, on définit le *produit de convolution* $\varphi * \psi \in \mathbb{K}^{(G)}$ de φ et ψ par

$$\varphi * \psi (u) = \sum_{s,t \in G, st=u} \varphi (s) \cdot \psi (t) \quad \text{pour tout } u \in G \ .$$

Par exemple

$$1_{\{s\}} * \varphi = \sum_{w \in G, sw=\diamond} \varphi (w) \ ,$$

et en particulier

$$1_{\{s\}} * 1_{\{t\}} = 1_{\{s \cdot t\}} \ ,$$

puisque

$$1_{\{s\}} * \varphi (u) = \sum_{v,w \in G, vw=u} 1_{\{s\}} (v) \cdot \varphi (w) = \sum_{w \in G, sw=u} \varphi (w) \ .$$

EXERCICE Montrer que $\mathbb{K}^{(G)}$ est une algèbre unifère, dont l'unité est $1_{\{e\}}$, qu'elle est involutive, pour l'involution induite par celle de $\mathbb{K}^G$, et que ces involutions sont adjointes (semi-linéaires) l'une de l'autre, i.e.

$$\langle \varphi^* | f \rangle = \overline{\langle \varphi | f^* \rangle} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathbb{K}^{(G)} \text{ et } f \in \mathbb{K}^G \ .$$

DÉFINITION 4 Nous désignerons par $\mathcal{M}_+^G \left(\mathcal{TP}^1 (G) \right)$ le cône convexe des intégrales de Radon positives μ sur $\mathcal{TP}^1 (G)$ telles que $\mathrm{id}_{\mathcal{TP}^1(G)} : \mathcal{TP}^1 (G) \hookrightarrow \mathbb{K}^G$ soit scalairement μ-intégrable dans $\mathbb{K}^G$. On définit de même $\mathcal{M}_+^G \left(\mathrm{Sp}^h G \right)$.

Puisque $f (e) = 1$ pour tout $f \in \mathcal{TP}^1 (G)$, on en déduit que

$$\mathcal{M}_+^G \left(\mathrm{Sp}^h G \right) \subset \mathcal{M}_+^G \left(\mathcal{TP}^1 (G) \right) \subset \mathcal{M}_+^b \left(\mathcal{TP}^1 (G) \right)$$

et, pour tout $\mu \in \mathcal{M}_+^G \left(\mathcal{TP}^1 (G) \right)$,

$$\varphi \longmapsto \int |\langle \varphi | g \rangle| \, d\mu (g) : \mathbb{K}^{(G)} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

est une semi-norme, évidemment continue, ce qui montre que $\mathrm{id}_{\mathcal{TP}^1(G)}$ est μ-intégrable au sens de Pettis dans $\mathbb{K}^G$.

DÉFINITION 5 Pour tout $\mu \in \mathcal{M}_+^G \left(\mathcal{TP}^1 (G) \right)$, on dit que

$$r (\mu) := \int g \, d\mu (g) \quad \text{dans } \mathbb{K}^G \ ,$$

i.e.

$$r (\mu) (s) := \int g (s) \, d\mu (g) \quad \text{pour tout } s \in G \ ,$$

est la *résultante* de μ .

Si $\mu \in \mathcal{M}_+^G\left(\operatorname{Sp}^h G\right)$, on dit que

$$\mathcal{FL}\mu := r\left(\mu\right) = \int \chi \, d\mu\left(\chi\right) \quad \text{dans } \mathbb{K}^G \ ,$$

i.e.

$$\mathcal{FL}\mu\left(s\right) := \int \chi\left(s\right) \, d\mu\left(g\right) \quad \text{pour tout } s \in G \ ,$$

est la *transformée de Fourier-Laplace* de μ .

PROPOSITION

(i) Pour qu'une fonction $f \in \mathbb{K}^G$ soit de type positif, il faut et il suffit que

$$\left\langle \varphi^* * \varphi \middle| f \right\rangle \geqslant 0 \quad \textit{pour tout } \varphi \in \mathbb{K}^{(G)} \ .$$

(ii) Pour que $\chi : G \longrightarrow \mathbb{K}$ soit un caractère de G , il faut et il suffit que χ soit un caractère de l'algèbre $\mathbb{K}^{(G)}$, i.e. que pour tout $\varphi, \psi \in \mathbb{K}^{(G)}$, on ait

$$\left\langle \varphi * \psi \middle| \chi \right\rangle = \left\langle \varphi \middle| \chi \right\rangle \cdot \left\langle \psi \middle| \chi \right\rangle \ .$$

(iii) On a $r\left(\mathcal{M}_+^G\left(\mathcal{TP}^1\left(G\right)\right)\right) \subset \mathcal{TP}\left(G\right)$.

Démonstration de (i) En effet, pour tout $\varphi \in \mathbb{K}^{(G)}$, on a

$$\sum_{s,t \in G} \overline{\varphi\left(s\right)} \cdot f\left(t^* \cdot s\right) \cdot \varphi\left(t\right) = \sum_{s,t \in G} \overline{\varphi^*\left(t\right) \cdot \varphi\left(s\right)} \cdot f\left(t \cdot s\right) =$$

$$= \sum_{u \in G} \overline{\sum_{t,s \in G, ts = u} \varphi^*\left(t\right) \cdot \varphi\left(s\right)} \cdot f\left(u\right) = \left\langle \varphi^* * \varphi \middle| f \right\rangle \ ,$$

d'où notre assertion par la remarque 3.

Démonstration de (ii) Si χ est un caractère de G , alors pour tout $\varphi, \psi \in \mathbb{K}^{(G)}$, il vient

$$\left\langle \varphi * \psi \middle| \chi \right\rangle = \sum_{u \in G} \overline{\varphi * \psi\left(u\right)} \cdot \chi\left(u\right) = \sum_{u \in G} \overline{\sum_{s,t \in G, st = u} \varphi\left(s\right) \cdot \psi\left(t\right)} \cdot \chi\left(u\right) =$$

$$= \sum_{s,t \in G} \overline{\varphi\left(s\right)} \cdot \overline{\psi\left(t\right)} \cdot \chi\left(s \cdot t\right) = \left(\sum_{s \in G} \overline{\varphi\left(s\right)} \cdot \chi\left(s\right)\right) \cdot \left(\sum_{t \in G} \overline{\psi\left(t\right)} \cdot \chi\left(t\right)\right) =$$

$$= \left\langle \varphi \middle| \chi \right\rangle \cdot \left\langle \psi \middle| \chi \right\rangle \ ,$$

puisque $\left(\overset{-1}{m}\left(u\right)\right)_{u \in G}$ est une partition de $G \times G$, où m désigne la multiplication sur G , donc χ est un caractère de $\mathbb{K}^{(G)}$. Réciproquement si χ est un caractère de $\mathbb{K}^{(G)}$, alors

$$\chi\left(st\right) = \left\langle 1_{\{st\}} \middle| \chi \right\rangle = \left\langle 1_{\{s\}} * 1_{\{t\}} \middle| \chi \right\rangle = \left\langle 1_{\{s\}} \middle| \chi \right\rangle \cdot \left\langle 1_{\{t\}} \middle| \chi \right\rangle = \chi\left(s\right) \cdot \chi\left(t\right) \ ,$$

donc χ est un caratère de G .

Démonstration de (iii) En effet si $\mu \in \mathcal{M}_+^G\left(\mathcal{TP}^1\left(G\right)\right)$, alors

$$r\left(\mu\right)^* = \left(\int g \, d\mu\left(g\right)\right)^* = \int g^* \, d\mu\left(g\right) = \int g \, d\mu\left(g\right) = r\left(\mu\right)$$

et, pour tout $\varphi \in \mathbb{K}^{(G)}$, on a

$$\langle \varphi^* * \varphi | r(\mu) \rangle = \int \langle \varphi^* * \varphi | g \rangle \, d\mu(g) = \int |\langle \varphi | g \rangle|^2 \, d\mu(g) \geqslant 0 \, ,$$

ce qui finit de prouver que $r(\mu)$ est de type positif. □

REMARQUE 5 On a évidemment $\mathcal{M}_+^c(\mathrm{Sp}^h G) \subset \mathcal{M}_+^G(\mathrm{Sp}^h G)$ et si $\mu \in \mathcal{M}_+^G(\mathrm{Sp}^h G)$, alors

$$|\mathcal{FL}\mu(s)| \leqslant \int |\chi(s)| \, d\mu(\chi) \leqslant \sup_{\chi \in \operatorname{supp} \mu} |\chi(s)| \cdot \mu(\operatorname{supp} \mu) \, .$$

Comme la fonction

$$\rho_{\operatorname{supp} \mu} : G \longrightarrow \mathbb{R}_+ : s \longmapsto \sup_{\chi \in \operatorname{supp} \mu} |\chi(s)|$$

satisfait à

$$\rho_{\operatorname{supp} \mu}(e) = 1 \quad \text{et} \quad \rho_{\operatorname{supp} \mu}(s^* t) \leqslant \rho_{\operatorname{supp} \mu}(s) \cdot \rho_{\operatorname{supp} \mu}(t) \quad \text{pour tout } s, t \in G \, ,$$

nous sommes conduit à poser la

DÉFINITION 6 On dit qu'une fonction $\rho : G \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$\rho(e) = 1 \quad \text{et} \quad \rho(s^* t) \leqslant \rho(s) \cdot \rho(t) \quad \text{pour tout } s, t \in G$$

est une *valeur absolue* .

Une fonction $f : G \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite *ρ-bornée* , s'il existe une constante $c \in \mathbb{R}_+$ telle que $|f| \leqslant c \cdot \rho$ et *exponentiellement bornée* s'il existe une valeur absolue ρ telle f soit ρ-bornée.

On a $\rho(s^*) = \rho(s)$ pour tout $s \in G$, pour tout $\chi \in \mathrm{Sp}^h G$, $|\chi|$ est une valeur absolue, en particulier 1 est une valeur absolue. Si ρ est une valeur absolue, alors $\max(1, \rho)$ en est aussi une.

DÉFINITION 7 Nous désignerons par $\mathcal{TP}^b(G)$, $\mathcal{TP}^\rho(G)$ et $\mathcal{TP}^{eb}(G)$ l'ensemble des fonctions de type positif bornées, respectivement ρ-bornées et exponentiellement bornées.

Attention, bien que 1 soit une valeur absolue, nous n'utilisons pas la notation $\mathcal{TP}^1(G)$ pour désigner l'ensemble des fonctions de type positif bornées puisque celle-ci désigne déjà l'ensemble des fonctions de type positif valant 1 en e !

On a

$$\mathrm{Sp}^b G \subset \mathcal{TP}^b(G)$$

et

$$\mathrm{Sp}^h G \subset \bigcup_{\rho \text{ valeur absolue}} \mathcal{TP}^\rho(G) = \mathcal{TP}^{eb}(G) \subset \mathcal{TP}(G) \, .$$

EXEMPLE 2 Si G est un groupe muni de l'involution $\diamond^{-1}$, alors

$$\mathcal{TP}(G) = \mathcal{TP}^b(G) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Sp}^b G = \mathrm{Sp}^h G \, .$$

C'est une reformulation du lemme 1.iii. □

LEMME 2 *Pour tout $f \in \mathcal{TP}^{\rho}(G)$, on a*

$$|f(s)| \leqslant f(e) \cdot \rho(s) \ ,$$

et $\mathcal{TP}^{\rho}(G)$ est une face fermée de $\mathcal{TP}(G)$.

Le lemme 1.i montre que

$$|f(s)| \leqslant f(e)^{\frac{1}{2}} \cdot f(s^*s)^{\frac{1}{2}} \leqslant f(e)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(f(e)^{\frac{1}{2}} \cdot f\left((s^*s)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \ldots \leqslant$$

$$\leqslant f(e)^{\sum_{l=1}^{k} \frac{1}{2^l}} \cdot f\left((s^*s)^{2^{k-1}}\right)^{\frac{1}{2^k}}$$

en utilisant successivement la première inégalité. Mais

$$f\left((s^*s)^{2^{k-1}}\right) \leqslant c \cdot \rho\left((s^*s)^{2^{k-1}}\right) \leqslant c \cdot \rho(s)^{2^k} \ ,$$

donc

$$|f(s)| \leqslant c^{\frac{1}{2^k}} \cdot f(e)^{\sum_{l=1}^{k} \frac{1}{2^l}} \cdot \rho(s) \to f(e) \cdot \rho(s) \ .$$

Nous avons donc montré que

$$\mathcal{TP}^{\rho}(G) = \bigcap_{s \in G} \{ f \in \mathcal{TP}(G) \mid |f(s)| \leqslant f(e) \cdot \rho(s) \}$$

est fermé dans $\mathcal{TP}(G)$. C'est une face car si $f \in \mathcal{TP}^{\rho}(G)$ et $g \in \mathcal{TP}(G)$ est telle que $g \leqslant_{\mathcal{TP}(G)} f$, on a en particulier $g(s^*s) \leqslant f(s^*s)$ pour tout $s \in G$, donc

$$|g(s)|^2 \leqslant g(e) \cdot g(s^*s) \leqslant g(e) \cdot f(s^*s) \leqslant g(e) \cdot c \cdot \rho(s^*s) \leqslant g(e) \cdot c \cdot \rho(s)^2 \ ,$$

ce qui montre que $g \in \mathcal{TP}^{\rho}(G)$. □

REMARQUE 6 $\mathcal{TP}^{eb}(G)$ est une face de $\mathcal{TP}(G)$, mais elle n'est en général pas fermée.

THÉORÈME

(i) Si ρ une valeur absolue sur G , l'ensemble $\mathcal{TP}^{\rho,1}(G)$ des fonctions de type positif $f \in \mathcal{TP}^{\rho}(G)$ telles que $f(e) = \left\langle 1_{\{e\}} \middle| f \right\rangle = 1$ est un ensemble convexe compact de $\mathcal{TP}(G)$ et c'est une base de $\mathcal{TP}^{\rho}(G)$, i.e. $\mathcal{TP}^{\rho}(G) = \mathbb{R}_+ \cdot \mathcal{TP}^{\rho,1}(G)$.

Pour tout $f \in \mathcal{TP}^{\rho,1}(G)$, il existe $\mu \in \mathcal{M}_+\left(\mathcal{TP}^{\rho,1}(G)\right)$ qui soit $\mathcal{R}\left(\mathcal{TP}^{\rho,1}(G)\right)$-minimale et telle que

$$f = \int_{\mathcal{TP}^{\rho,1}(G)} g \, d\mu(g) \quad \text{dans } \mathbb{K}^G \ .$$

Elle est à support compact dans $\mathcal{TP}^1(G)$ et μ est portée par tout ensemble K_σ contenant $Ch\left(\mathcal{TP}^{\rho,1}(G)\right)$.

En outre $\mathcal{TP}^{\rho}(G) = r\left(\mathcal{M}_+\left(\mathcal{TP}^{\rho,1}(G)\right)\right)$ et

$$\mathcal{TP}^{eb}(G) \subset r\left(\mathcal{M}_+^c\left(\mathcal{TP}^1(G)\right)\right) \subset r\left(\mathcal{M}_+^G\left(\mathcal{TP}^1(G)\right)\right) \subset \mathcal{TP}(G) \ .$$

(ii) Si G est un groupe muni de l'involution $\diamond^{-1}$, alors $\mathcal{TP}^1(G)$ est un ensemble convexe compact et

$$\mathcal{TP}(G) = r\left(\mathcal{M}_+\left(\mathcal{TP}^1(G)\right)\right) \ .$$

Si G est dénombrable, alors $Ch\left(\mathcal{TP}^1(G)\right)$ est un G_δ , toute intégrale de Radon positive bornée sur $Ch\left(\mathcal{TP}^1(G)\right)$ est $\mathcal{R}\left(\mathcal{TP}^1(G)\right)$-minimale et

$$\mathcal{TP}(G) = r\left(\mathcal{M}_+^b\left(Ch\left(\mathcal{TP}^1(G)\right)\right)\right) \ .$$

Nous supposerons maintenant en plus que G est commutatif.

(iii) On a

$$\check{S}\left(\mathcal{TP}^{\rho,1}(G)\right) = Ch\left(\mathcal{TP}^{\rho,1}(G)\right) = \mathrm{Sp}^h G \cap \mathcal{TP}^\rho(G) \ .$$

Cet ensemble est en particulier compact,

$$\check{S}\left(\mathcal{TP}^{b,1}(G)\right) = Ch\left(\mathcal{TP}^{b,1}(G)\right) = \mathrm{Sp}^b G$$

et

$$\mathrm{Sp}^h G = Ch\left(\mathcal{TP}^1(G)\right) \cap \mathcal{TP}^{eb}(G) \ .$$

(iv) Pour tout $f \in \mathcal{TP}^{eb}(G)$, il existe une unique intégrale de Radon positive $\mu \in \mathcal{M}_+^G\left(\mathrm{Sp}^h G\right)$ représentant f , donc telle que $\mathrm{id}_{\mathrm{Sp}^h G}$ soit μ-intégrable et que

$$f = \mathcal{FL}\mu = \int \chi \, d\mu(\chi) \quad \textit{dans } \mathbb{K}^G \ .$$

Elle est à support compact et on a

$$\mathcal{TP}^{eb}(G) = \mathcal{FL}\left(\mathcal{M}_+^c\left(\mathrm{Sp}^h G\right)\right) \subset \mathcal{FL}\left(\mathcal{M}_+^G\left(\mathrm{Sp}^h G\right)\right) \subset \mathcal{TP}(G) \ ,$$

ainsi que

$$\mathcal{TP}^b(G) = \mathcal{FL}\left(\mathcal{M}_+\left(\mathrm{Sp}^b G\right)\right) \ .$$

Démonstration de (i) D'après le lemme 1.ii il suffit de montrer que $\mathcal{TP}^{\rho,1}(G)$ est compact. Mais pour tout $s \in G$, on a

$$\mathcal{TP}^{\rho,1}(G)(s) \subset B_{\rho(s)}$$

par le lemme 2 ci-dessus, ce qui montre que $\mathcal{TP}^{\rho,1}(G)$ est ponctuellement bornée, donc compacte par le théorème de Tychonoff, puisqu'elle est fermée. La représentation intégrale de $f \in \mathcal{TP}^{\rho,1}(G)$ découle du théorème 1.4 et du corollaire 1.5.1 de Choquet-Bishop-de Leeuw.

Démonstration de (ii) Si G est un groupe, alors $\mathcal{TP}(G) = \mathcal{TP}^1(G)$ d'après l'exemple 2 ci-dessus, donc $\mathcal{TP}^1(G) = \mathcal{TP}^1(G)^1$. Si G est dénombrable, $\mathbb{C}^G$ est métrisable, donc aussi $\mathcal{TP}^1(G)$ et le résultat découle du théorème de Choquet (corollaire 1.4).

Démonstration de (iii) A nouveau par le lemme 1.ii, on a l'inclusion $\mathrm{Sp}^h G \cap \mathcal{TP}^\rho(G) \subset Ch\left(\mathcal{TP}^{\rho,1}(G)\right)$ et nous avons vu ci-dessus que $\mathrm{Sp}^h G \subset \mathcal{TP}^{eb}(G)$. Pour l'autre inclusion il suffit de montrer qu'un point extrémal χ de $\mathcal{TP}^{\rho,1}(G)$ est un caractère. Remarquons que $\chi(e) \neq 0$. D'après la remarque 2.1.3 il nous suffit de montrer que, pour tout $s, t \in G$, on a $\chi(st) = \chi(s) \cdot \chi(t)$. Nous écrivons la démonstration comme si G n'était pas commutatif pour bien montrer où cette hypothèse est utilisée. Introduisons pour $s \in G$ et $\varepsilon \in \{\pm 1, \pm i\} \cap \mathbb{K}$ la fonction χ_ε définie sur G par

$$\chi_\varepsilon(t) := \frac{1}{2} \cdot \left[\rho(s) \cdot \chi(t) + \frac{\overline{\varepsilon}}{2} \cdot \chi(ts^*) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \chi(st)\right] \ .$$

Nous montrerons ci-dessous (lemme 4) que $\chi_\varepsilon \in \mathcal{TP}^\rho(G)$.

Si $\rho(s) = 0$, alors $\chi(s) = 0$ et

$$|\chi(st)| \leqslant \chi(e) \cdot \rho(st) \leqslant \chi(e) \cdot \rho(s) \cdot \rho(t) = 0 \ ,$$

donc $\chi(st) = \chi(s) \cdot \chi(t)$.

Si $\rho(s) \neq 0$ et comme χ est une générateur extrémal de $\mathcal{TP}^{\rho}(G)$ par le lemme 2.2.1.ii et que $\rho(s) \cdot \chi = \chi_{\varepsilon} + \chi_{-\varepsilon}$, il existe $\lambda_{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+$ tels que $\chi_{\varepsilon} = \lambda_{\varepsilon} \cdot \chi$. On a alors

$$\lambda_{\varepsilon} = \lambda_{\varepsilon} \cdot \chi(e) = \chi_{\varepsilon}(e) = \frac{1}{2} \cdot \left[\rho(s) + \frac{\overline{\varepsilon}}{2} \cdot \chi(s^*) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \chi(s)\right] =$$

$$\underset{\chi=\chi^*}{=} \frac{1}{2} \cdot \left[\rho(s) + \frac{\overline{\varepsilon}}{2} \cdot \overline{\chi}(s) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \chi(s)\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\rho(t) + \operatorname{Re}\left(\varepsilon \cdot \chi(s)\right)\right] \ ,$$

donc

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\rho(s) \cdot \chi(t) + \frac{\overline{\varepsilon}}{2} \cdot \chi(ts^*) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \chi(st)\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\rho(s) + \operatorname{Re}\left(\varepsilon \cdot \chi(s)\right)\right] \cdot \chi(t)$$

et par suite

$$\frac{\overline{\varepsilon}}{2} \cdot \chi(ts^*) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \chi(st) = \chi(s) \cdot \operatorname{Re}\left(\varepsilon \cdot \chi(t)\right) \ .$$

Pour $\varepsilon = 1$, on obtient tout d'abord

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\chi(ts^*) + \chi(st)\right] = \chi(s) \cdot \operatorname{Re}\chi(t) \ ,$$

puis pour $\varepsilon = -i$:

$$\frac{i}{2} \cdot \left[\chi(ts^*) - \chi(st)\right] = \chi(s) \cdot \operatorname{Im}\chi(t) \ ,$$

donc

$$\chi(st) = \chi(s) \cdot \chi(t) \ .$$

Dans le cas réel nous obtenons

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\chi(ts^*) + \chi(st)\right] = \chi(s) \cdot \chi(t) \ ,$$

et par suite la même formule, puisque l'involution est id_G et G commutatif!

Pour l'égalité $\check{S}\left(\mathcal{TP}^{\rho,1}(G)\right) = Ch\left(\mathcal{TP}^{\rho,1}(G)\right)$, il suffit de montrer que $Ch\left(\mathcal{TP}^{\rho,1}(G)\right) = \mathrm{Sp}^h G \cap \mathcal{TP}^{\rho}(G)$ est fermée. Mais $\mathrm{Sp}^h G$, comme ensemble des caractères hermitiens, est défini par des conditions ponctuelles, donc est une partie fermée de $\mathbb{K}^G$, ainsi que $\mathcal{TP}^{\rho}(G)$ par le lemme 2.

Démonstration de (iv) L'existence d'une représentation intégrale μ à support compact, contenu dans $\check{S}\left(\mathcal{TP}^{\rho,1}(G)\right)$, découle donc du théorème de Choquet-Bishop-de Leeuw (corollaire 1.5.1) ou de la remarque 1.3.2. Les inclusions finales sont donc démontrées en tenant compte de la proposition 2.6.iv et de la remarque 2.6.2.

L'unicité se démontre pratiquement comme dans le théorème de Hausdorff-Bernstein-Widder (corollaire 2.3) en remplaçant $\mathcal{EXP}_+^b(G)$, qui est compact, par $\mathrm{Sp}^h G$, qui ne l'est pas en général, mais en jouant sur le support de μ . Soit donc

$$\mathcal{G} : G \longrightarrow \mathcal{C}\left(\mathrm{Sp}^h G\right) : s \longmapsto \mathcal{G}s \ ,$$

avec $\mathcal{G}s(\chi) := \chi(s)$ pour tout $s \in G$. Rappelons que $\mathrm{Sp}^h G \subset \mathbb{C}^G$ est muni de la topologie de la convergence ponctuelle. On a $\mathcal{G}(st) = \mathcal{G}s \cdot \mathcal{G}t$, $\mathcal{G}s^* = \overline{\mathcal{G}s}$ et $\mathcal{G}e = 1$, ce qui montre que $\mathrm{lin}\,\mathcal{G}(G)$ est une sous-algèbre involutive de $\mathcal{C}\left(\mathrm{Sp}^h G\right)$ contenant les constantes et séparant les points de $\mathrm{Sp}^h G$. Si $\nu \in \mathcal{M}_+\left(\mathrm{Sp}^h G\right)$ représente f , donc est telle que $\mathrm{id} : \mathrm{Sp}^h G \hookrightarrow \mathbb{C}^G$ soit scalairement ν-intégrable et que

$$f = \int \chi \, d\nu(\chi) \quad \text{dans } \mathbb{C}^G \ ,$$

on a

$$\int \mathcal{G}s(\chi) \, d\nu(\chi) = f(s) = \int \mathcal{G}s(\chi) \, d\mu(\chi) \quad \text{pour tout } s \in G \ ,$$

ce qui montre que μ et ν coïncident sur $\operatorname{lin} \mathcal{G}(G)$. Nous allons prouver que $\operatorname{supp} \nu \subset \operatorname{supp} \mu$. Si tel n'est pas le cas, il existe $K \in \mathfrak{K}\left(\operatorname{Sp}^h G\right)$ disjoint de $\operatorname{supp} \mu$ tel que $\nu(K) > 0$. Par le théorème de Stone-Weierstraß appliqué à la fonction $\left(1 + \sqrt{\frac{\nu(K)}{2 \cdot f(0)}}\right) \cdot 1_K \in \mathcal{C}(K \cup \operatorname{supp} \mu)$, il existe une fonction réelle $g \in \operatorname{lin} \mathcal{G}(G)$ telle que $\left|g - 1 - \sqrt{\frac{\nu(K)}{2 \cdot f(0)}}\right| \leqslant \sqrt{\frac{\nu(K)}{2 \cdot f(0)}}$ sur K et $|g| \leqslant \sqrt{\frac{\nu(K)}{2 \cdot f(0)}}$ sur $\operatorname{supp} \mu$. Par suite $g^2 \in \operatorname{lin} \mathcal{G}(G)_+$, $g^2 \geqslant 1$ sur K et $0 \leqslant g^2 \leqslant \frac{\nu(K)}{2 \cdot f(0)}$ sur $\operatorname{supp} \mu$, donc

$$\nu(K) \leqslant \int_K g^2 \, d\nu \leqslant \int g^2 \, d\nu = \int g^2 \, d\mu \leqslant \frac{\nu(K)}{2 \cdot f(0)} \cdot \mu\left(\operatorname{Sp}^h G\right) = \frac{\nu(K)}{2} \ ,$$

puisque $\mu\left(\operatorname{Sp}^h G\right) = \int 1 \, d\mu = f(0)$, ce qui est absurde. Le théorème de Stone-Weierstraß appliqué à $\operatorname{lin} \mathcal{G}(G)_{|\operatorname{supp} \mu}$, qui est dense dans $\mathcal{C}(\operatorname{supp} \mu)$, montre alors que $\nu = \mu$. —— □

REMARQUE 7 Les assertions de (ii) se généralise aux groupes G localement compact muni de l'involution $\diamond^{-1}$, voire même aux algèbres stellaires. Les fonctions continues de type positif extrémales dans $\mathcal{TP}^1(G)$, dites *pures* , i.e. appartenant à $Ch\left(\mathcal{TP}^1(G)\right)$, conduisent à des représentations unitaires irréductibles ; un caractère est une représentation unitaire de dimension 1 , donc irréductible ! On n'a en général pas unicité de la représentation par une intégrale de Radon positive $\mathcal{R}\left(\mathcal{TP}^1(G)\right)$-minimale. Pour plus de détails consulter le livre de Dixmier [Dix 1964], en particulier le §13.

LEMME 3 *Pour tout $f \in \mathcal{TP}(G)$ et $\varphi \in \mathbb{K}^{(G)}$, la fonction g définie sur G par*

$$g(s) := \sum_{u,v \in G} \overline{\varphi(u)} \cdot f(v^* s u) \cdot \varphi(v)$$

est de type positif. Si $f \in \mathcal{TP}^\rho(G)$, alors $g \in \mathcal{TP}^\rho(G)$.

En effet pour tout $\psi \in \mathbb{K}^{(G)}$, il vient

$$\sum_{s,t \in G} \overline{\psi(s)} \cdot g(t^* s) \cdot \psi(t) = \sum_{s,t \in G} \overline{\psi(s)} \cdot \sum_{u,v \in G} \overline{\varphi(u)} \cdot f(v^* t^* s u) \cdot \varphi(v) \cdot \psi(t) =$$

$$\underset{p=su,q=tv}{=} \sum_{p,q \in G} \overline{\sum_{s,u \in G, su=p} \psi(s) \cdot \varphi(u)} \cdot f(q^* p) \cdot \sum_{t,v \in G, tv=q} \varphi(v) \cdot \psi(t) =$$

$$= \sum_{p,q \in G} \overline{\zeta(p)} \cdot f(q^* p) \cdot \zeta(q) \ ,$$

en ayant posé $\zeta(q) := \sum_{t,v \in G, tv=q} \varphi(v) \cdot \psi(t)$. Remarquons que $\zeta \in \mathbb{K}^{(G)}$, puisque $\operatorname{supp} \zeta \subset \operatorname{supp} \varphi \cdot \operatorname{supp} \psi$. D'autre part

$$g^*(s) = \overline{g(s^*)} = \sum_{u,v \in G} \varphi(u) \cdot \overline{f(v^* s^* u)} \cdot \overline{\varphi(v)} = \sum_{u,v \in G} \overline{\varphi(u)} \cdot f^*(v^* s u) \cdot \varphi(v) \underset{f=f^*}{=} g(s) \ .$$

Si $f \in \mathcal{TP}^{\rho}(G)$, grâce au lemme 2 on obtient

$$|f(v^*su)| \leqslant f(e) \cdot \rho(v^*su) \leqslant f(e) \cdot \rho(v) \cdot \rho(s) \cdot \rho(u) \ ,$$

donc

$$|g(s)| \leqslant f(e) \cdot \left(\sum_{u \in G} |\varphi(u)| \cdot \rho(u)\right) \cdot \rho(s) \cdot \left(\sum_{v \in G} |\varphi(v)| \cdot \rho(v)\right) =$$

$$= f(e) \cdot \left|\sum_{u \in G} \varphi(u) \cdot \rho(u)\right|^2 \cdot \rho(s) \ .$$

Ce lemme est valable dans le cas général! □

LEMME 4 *Supposons G commutatif. Pour tout $f \in \mathcal{TP}^{\rho}(G)$, $s \in G$ et $\varepsilon \in \{\pm 1, \pm i\} \cap \mathbb{K}$, la fonction f_{ε} définie sur G par*

$$f_{\varepsilon}(t) := \rho(s) \cdot f(t) + \frac{\overline{\varepsilon}}{2} \cdot f(ts^*) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot f(st)$$

appartient à $\mathcal{TP}^{\rho}(G)$.

Pour tout $\varphi \in \mathbb{K}^{(G)}$, définissons g comme dans le lemme 3 précédent. On a alors

$$\sum_{u,v \in G} \overline{\varphi(u)} \cdot f_{\varepsilon}(v^*u) \cdot \varphi(v) =$$

$$\underset{f=f^*}{=} \rho(s) \cdot \sum_{u,v \in G} \overline{\varphi(u)} \cdot f(v^*u) \cdot \varphi(v)$$

$$+ \sum_{u,v \in G} \overline{\varphi(u)} \cdot \frac{\overline{\varepsilon}}{2} \cdot f^*(v^*us^*) \cdot \varphi(v) + \sum_{u,v \in G} \overline{\varphi(u)} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot f(sv^*u) \cdot \varphi(v) =$$

$$\underset{G \text{ commutatif}}{=} \rho(s) \cdot \sum_{u,v \in G} \overline{\varphi(u)} \cdot f(v^*u) \cdot \varphi(v)$$

$$+ \frac{\overline{\varepsilon}}{2} \cdot \sum_{u,v \in G} \overline{\varphi(v)} \cdot \overline{f(v^*su)} \cdot \varphi(u) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sum_{u,v \in G} \overline{\varphi(u)} \cdot f(v^*su) \cdot \varphi(v) =$$

$$= \rho(s) \cdot g(e) + \operatorname{Re}(\varepsilon \cdot g(s)) \geqslant \rho(s) \cdot g(e) - |g(s)| \underset{\text{lemmes 2 et 3}}{\geqslant} 0 \ ,$$

ainsi que

$$f_{\varepsilon}^*(t) = \overline{f_{\varepsilon}(t^*)} = \rho(s) \cdot \overline{f(t^*)} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \overline{f(t^*s^*)} + \frac{\overline{\varepsilon}}{2} \cdot \overline{f(st^*)} =$$

$$= \rho(s) \cdot f^*(t) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot f^*(st) + \frac{\overline{\varepsilon}}{2} \cdot f^*(ts^*) \underset{f=f^*}{=} f_{\varepsilon}(s) \ ,$$

ce qui montre que $f_{\varepsilon} \in \mathcal{TP}(G)$. Finalement

$$|f_{\varepsilon}(t)| \leqslant \rho(s) \cdot f(e) \cdot \rho(t) + \frac{1}{2} \cdot f(e) \cdot \rho(ts^*) + \frac{1}{2} \cdot f(e) \cdot \rho(st) \leqslant 2 \cdot f(e) \cdot \rho(s) \cdot \rho(t) \ ,$$

donc $f_{\varepsilon} \in \mathcal{TP}^{\rho}(G)$. C'est dans ce lemme que la commutativité joue un rôle! □

2.7 Fonctions de type positif sur un monoïde involutif

Nous allons maintenant étudier les défauts d'égalité dans les inclusions
$$\mathcal{TP}^{eb}(G) = \mathcal{FL}\left(\mathcal{M}_+^c\left(\mathrm{Sp}^h G\right)\right) \subset \mathcal{FL}\left(\mathcal{M}_+^G\left(\mathrm{Sp}^h G\right)\right) \subset \mathcal{TP}(G)$$
(cf. théorème 2.6.iv)

Rappelons que l'on considère la semi-dualité séparante $\left\langle \mathbb{K}^{(G)} \middle| \mathbb{K}^G \right\rangle$, que $\mathbb{K}^{(G)}$ est une algèbre de convolution involutive et que $\mathcal{TP}(G)$ s'identifie aux formes (semi-) linéaires, les éléments de $\mathbb{K}^G$, qui sont hermitiennes positives sur $\mathbb{K}^{(G)}$, ordonné par le cône convexe $\mathbb{K}_*^{(G)}$ engendré par les éléments de la forme $\varphi^* * \varphi$, pour $\varphi \in \mathbb{K}^{(G)}$ (proposition 2.6.i). En termes de dualité on a
$$\mathcal{TP}(G) = \left(\mathbb{K}_*^{(G)}\right)^\circ .$$

Le dual $\mathrm{Sp}^h G \subset \mathbb{K}^G$ de G est formé des caractères hermitiens de G ou $\mathbb{K}^{(G)}$ (proposition 2.6.ii). C'est un monoïde unifère involutif topologique, pour la multiplication ponctuelle, la conjugaison et la topologie de la convergence ponctuelle induite par $\mathbb{K}^G$.

Pour tout $\varphi \in \mathbb{K}^{(G)}$ et $f \in \mathbb{K}^G$, on a
$$\langle \varphi | f \rangle := \langle \varphi | f \rangle_{\mathbb{K}^{(G)}} := \sum_{s \in G} \overline{\varphi(s)} \cdot f(s)$$
et
$$\langle f | \varphi \rangle := \langle f | \varphi \rangle_{\mathbb{K}^G} := \sum_{s \in G} \overline{f(s)} \cdot \varphi(s) .$$

Nous désignerons par $\mathcal{C}_c\left(\mathrm{Sp}^h G\right)$ l'espace localement convexe des fonctions continues sur $\mathrm{Sp}^h G$ muni de la topologie de la convergence compacte. Son dual est $\mathcal{M}^c\left(\mathrm{Sp}^h G\right)$ des intégrales de Radon à support compact.

DÉFINITION 1 L'application linéaire
$$\mathcal{G} : \mathbb{K}^{(G)} \longrightarrow \mathcal{C}_c\left(\mathrm{Sp}^h G\right) : \varphi \longmapsto \mathcal{G}\varphi := \langle \diamond | \varphi \rangle_{|\mathrm{Sp}^h G} ,$$
définie par $\mathcal{G}\varphi(\chi) := \sum_{s \in G} \overline{\chi(s)} \cdot \varphi(s)$, s'appelle la *transformation de Gelfand* .

On a $\mathcal{G}s := \mathcal{G}1_{\{s\}} = \overline{\diamond(s)}$; attention dans les démonstrations du corollaire 2.3. et du théorème 2.6, nous n'avons pas tenu compte de la conjugaison.

LEMME

(i) La transformation de Gelfand $\mathcal{G} : \mathbb{K}^{(G)} \longrightarrow \mathcal{C}_c\left(\mathrm{Sp}^h G\right)$ *est un homomorphisme d'algèbre unifère involutive. Il est continu et*
$$\mathcal{G}^\dagger : \mathcal{M}^c\left(\mathrm{Sp}^h G\right) \longrightarrow \mathbb{K}^G$$
est la transformation de Fourier-Laplace $\mathcal{FL}$ *.*

(ii) $\mathcal{G}$ *est injective, i.e.* $(\mathcal{G}s)_{s \in G}$ *est libre dans* $\mathcal{C}\left(\mathrm{Sp}^h G\right)$ *si, et seulement si,* $\mathrm{Sp}^h G$ *sépare les points de* G *.*

Dans ce cas

(iii) $\mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)$ *est une sous-algèbre unifère involutive de* $\mathcal{C}\left(\mathrm{Sp}^h G\right)$ *et, munie de la topologie localement convexe la plus fine, et elle est isomorphe à* $\mathbb{K}^{(G)}$ *. Ceci nous permet d'identifier le dual de* $\mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)$ *avec* $\mathbb{K}^G$ *, mais nous munirons* $\mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)$ *de l'ordre défini par le cône convexe pointu fermé* $\mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_+$ *induit par* $\mathcal{C}_+\left(\mathrm{Sp}^h G\right) \subset \mathbb{K}_+^{\mathrm{Sp}^h G}$ *.*

(iv) Le cône convexe $\mathcal{G}\left(\mathbb{K}_*^{(G)}\right)$ *est engendré par les éléments de la forme* $|\mathcal{G}\varphi|^2$ *pour* $\varphi \in \mathbb{K}^{(G)}$ *et on a*

$$\mathcal{G}\left(\mathbb{K}_*^{(G)}\right) \subset \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_+ \ ,$$

$$\mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right) = \operatorname{lin} \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_+$$

ainsi que

$$\mathcal{FL}\left(\mathcal{M}_+^G\left(\mathrm{Sp}^h G\right)\right) \subset \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^G\right)_+^\circ \subset \mathcal{TP}(G) = \mathcal{G}\left(\mathbb{K}_*^{(G)}\right)^\circ \ .$$

Démonstration de (i) Pour tout $\varphi, \psi \in \mathbb{K}^{(G)}$ et $\chi \in \mathrm{Sp}^h G$, on a

$$\mathcal{G}(\varphi * \psi)(\chi) = \langle \chi | \varphi * \psi \rangle = \langle \chi | \varphi \rangle \cdot \langle \chi | \psi \rangle = \mathcal{G}\varphi(\chi) \cdot \mathcal{G}\psi(\chi)$$

et

$$\mathcal{G}\varphi^*(\chi) = \langle \chi | \varphi^* \rangle = \overline{\langle \chi^* | \varphi \rangle} = \overline{\langle \chi | \varphi \rangle} = \overline{\mathcal{G}\varphi(\chi)} \ .$$

Pour tout $\mu \in \mathcal{M}^c\left(\mathrm{Sp}^h G\right)$ et $\varphi \in \mathbb{K}^{(G)}$, on a

$$\left\langle \varphi \middle| \mathcal{G}^\dagger \mu \right\rangle = \langle \mathcal{G}\varphi | \mu \rangle = \int \overline{\mathcal{G}\varphi(\chi)}\, d\mu(\chi) = \int \overline{\langle \chi | \varphi \rangle}\, d\mu(\chi) =$$

$$= \int \langle \varphi | \chi \rangle\ d\mu(\chi) = \left\langle \varphi \middle| \int \chi\, d\mu(\chi) \right\rangle = \langle \varphi | \mathcal{FL}\mu \rangle \ .$$

Démonstration de (ii) L'injectivité de $\mathcal{G}$ signifie évidemment que $(\mathcal{G}s)_{s \in G}$ est libre dans $\mathcal{C}\left(\mathrm{Sp}^h G\right)$, puisque $\left(1_{\{s\}}\right)_{s \in G}$ est une base algébrique de $\mathbb{K}^{(G)}$. Si pour $s, t \in G$, on a

$$\mathcal{G}s(\chi) = \overline{\chi(s)} = \overline{\chi(t)} = \mathcal{G}t(\chi) \quad \text{pour tout } \chi \in \mathrm{Sp}^h G \ ,$$

on déduit de l'injectivité que $s = t$, donc $\mathrm{Sp}^h G$ sépare les points de G . Réciproquement $\operatorname{lin} \mathrm{Sp}^h G$ est une sous-algèbre unifère involutive de $\mathbb{K}^G$ séparant les points de G , donc dense par le théorème de Stone-Weierstraß ; on a alors

$$\{0\} = \left(\operatorname{lin} \mathrm{Sp}^h G\right)^\perp = \left\{ \varphi \in \mathbb{K}^{(G)} \ \middle|\ \mathcal{G}\varphi\left(\mathrm{Sp}^h G\right) = \left\langle \mathrm{Sp}^h G \middle| \varphi \right\rangle = \{0\} \right\} = \operatorname{Ker} \mathcal{G} \ .$$

Voici une démonstration élémentaire : si $\varphi \in \mathbb{K}^{(G)}$ est tel que $\mathcal{G}\varphi = 0$, on a $\left\langle \mathrm{Sp}^h G \middle| \varphi \right\rangle = \{0\}$, donc $\left\langle \operatorname{lin} \mathrm{Sp}^h G \middle| \varphi \right\rangle = \{0\}$. Mais pour tout $t, u \in \operatorname{supp} \varphi$ tels que $t \neq u$, il existe $\chi_{t,u} \in \mathrm{Sp}^h G$ tel que $\chi_{t,u}(t) \neq \chi_{t,u}(u)$ et, en posant

$$f_t := \prod_{u \in \operatorname{supp} \varphi \smallsetminus \{t\}} \frac{\chi_{t,u} - \chi_{t,u}(u) \cdot 1}{\chi_{t,u}(t) - \chi_{t,u}(u)} \ ,$$

on a $f_t \in \operatorname{lin} \mathrm{Sp}^h G$, puisque $\mathrm{Sp}^h G$ est stable par multiplication ponctuelle, ainsi que $f_t(t) = 1$ et $f_t(s) = 0$ si $s \in \operatorname{supp} \varphi \smallsetminus \{t\}$. On en déduit

$$0 = \langle f_t | \varphi \rangle = \sum_{s \in G} \overline{f_t} \cdot \varphi(s) = \varphi(t) \quad \text{pour tout } t \in \operatorname{supp} \varphi \ ,$$

donc $\varphi = 0$.

Démonstration de (iii) C'est immédiat par ce qui précède, en remarquant que

$$\mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right) \hookrightarrow \mathcal{C}^c\left(\mathrm{Sp}^h G\right) \hookrightarrow \mathbb{K}^{\mathrm{Sp}^h G}$$

sont continues et que $\mathbb{K}_+^{\mathrm{Sp}^h G}$ est fermé.

Démonstration de (iv) En effet $\mathcal{G}(\varphi^* * \varphi) = |\mathcal{G}\varphi|^2 \geqslant 0$, ce qui prouve la première inclusion.

Puisque $\mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)$ est stable par conjugaison, on a $\mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right) = \mathrm{Re}\,\mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right) + i \cdot \mathrm{Re}\,\mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)$ et il nous suffit pour la première égalité de montrer que $\mathrm{Re}\,\mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right) = \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_+ - \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_+$, ce qui revient à prouver que $\mathrm{Re}\,\mathcal{G}s, \mathrm{Im}\,\mathcal{G}s \in \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_+ - \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_+$. Mais

$$|\mathcal{G}s|^2 = \mathcal{G}(s^*s) \leqslant 1 + 2\mathcal{G}(s^*s) + \mathcal{G}(s^*s)^2 = (1 + \mathcal{G}(s^*s))^2 \ ,$$

i.e. $|\mathcal{G}s| \leqslant 1 + \mathcal{G}(s^*s)$, donc $|\mathrm{Re}\,\mathcal{G}s| , |\mathrm{Im}\,\mathcal{G}s| \leqslant 1 + \mathcal{G}(s^*s)$ et par suite

$$1 + \mathcal{G}(s^*s) \ , \ \mathrm{Re}\,\mathcal{G}s + 1 + \mathcal{G}(s^*s) \ , \ \mathrm{Im}\,\mathcal{G}s + 1 + \mathcal{G}(s^*s) \in \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_+ \ .$$

Le résultat en découle, puisque

$$\mathrm{Re}\,\mathcal{G}s = \Big[\mathrm{Re}\,\mathcal{G}s + 1 + \mathcal{G}(s^*s)\Big] - \Big[1 + \mathcal{G}(s^*s)\Big]$$

et de même pour $\mathrm{Im}\,\mathcal{G}s$.

Si $\mu \in \mathcal{M}_+^G\left(\mathrm{Sp}^h G\right)$ et $f := \int \chi \, d\mu(\chi)$, on a $f = f^*$ et, pour tout $\varphi \in \mathbb{K}^{(G)}$ tel que $\mathcal{G}\varphi \in \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_+$, on obtient

$$\langle \mathcal{G}\varphi | f \rangle = \langle \varphi | f \rangle = \int \langle \varphi | \chi \rangle \, d\mu(\chi) = \int \overline{\mathcal{G}\varphi} \, d\mu(\chi) \geqslant 0 \ ,$$

donc $f \in \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{G}\right)_+^\circ$. Finalement puisque $\mathcal{G}\left(\mathbb{K}_*^{(G)}\right) \subset \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_+$, on obtient $\mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_+^\circ \subset \mathcal{G}\left(\mathbb{K}_*^{(G)}\right)^\circ = \mathcal{TP}(G)$. □

DÉFINITION 2 Soient X un espace topologique complétement régulier et A un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(X)$. Nous dirons que A est un *espace adapté* sur X si

(a) On a $A = \mathrm{lin}\, A_+$.

(b) Pour tout $x \in X$, il existe $a \in A$ tel que $a(x) \neq 0$.

(c) Pour tout $a \in A_+$, il existe $b \in A_+$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, une partie compacte K de X telle que

$$1_{\complement K} \cdot a \leqslant \varepsilon \cdot b \ .$$

On dit que b *domine* a .

Cette notion a été introduite par G. Choquet [Cho 1962].

THÉORÈME 1 (Un théorème de représentation de Riesz) *Soit A un espace adapté.*

Toute forme linéaire positive τ sur A est représentable par une intégrale de Radon positive μ sur X .

En posant $A_{\mathbb{R}} := A_+ - A_+$, on a évidemment $A = A_{\mathbb{R}} + i \cdot A_{\mathbb{R}}$ par (a). Il nous suffit donc de démontrer le théorème dans le cas réel. Soit $F := \{ f \in \mathcal{C}(X) \mid |f| \leqslant a \text{ pour un certain } a \in A_+ \}$. Si τ est une forme linéaire positive sur A , d'après le corollaire 1.1.2 il existe une forme linéaire positive ν sur F qui prolonge τ . Montrons maintenant que ν est *tendue* , i.e. pour tout $f \in F_+$ et $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset X$, tel que pour tout $g \in F$ satisfaisant à $|g| \leqslant 1_{\complement K} \cdot f$, on ait $|\nu(g)| \leqslant \varepsilon$: mais il existe $a, b \in A_+$ tels que $f \leqslant a$ et b domine a et, si $K \in \mathfrak{K}(X)$ est tel que $1_{\complement K} \cdot a \leqslant \frac{\varepsilon}{\nu(b)} \cdot b$ et $|g| \leqslant 1_{\complement K} \cdot f$, on a $|g| \leqslant \frac{\varepsilon}{\nu(b)} \cdot b$, donc $|\nu(g)| \leqslant \varepsilon$.

Il n'est alors pas difficile, grâce au théorème de Dini (cf. [Por AN], théorème 14.3.ii), de voir que ν satisfait à la propriété de Bourbaki (cf. [Por AN], § 14.5) et, au vu de l'hypothèse (b) faite sur A que, pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$, il existe $a \in A$ tel que $a \leqslant -1_K$. Puisque X est complètement régulier on en déduit facilement que $\mathcal{S}(X) \subset F_\phi$; la démonstration est analogue celle du théorème 14.4 de [Por AN] . On montre finalement que la restriction à $\mathcal{S}(X)$ du prolongement de ν à F_ϕ défini par

$$\mu(s) := \sup_{f \in F, f \leqslant s} \nu(f)$$

est une intégrale de Radon qui représente τ . $\square$

REMARQUE 1 Pour un théorème plus général et une discussion des intégrales de Radon sur un espace topologique séparé on peut se référer à mon article avec B. Anger [AngPor 1990], ou à notre livre [AngPor 1992].

DÉFINITION 3 Soit X un espace topologique complétement régulier. On dit qu'une fonction s.c.i. $\kappa : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+^*$ *tend vers l'infini à l'infini* si elle est $\neq \infty$ et si, pour tout $M \in \mathbb{R}_+$, la partie fermée $\{\kappa \leqslant M\}$ est compacte.

Une telle fonction atteint son minimum et il est > 0 !

COROLLAIRE *On suppose que G est commutatif, que* $\mathrm{Sp}^h G$ *sépare les points de G et qu'il existe $\kappa \in \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_+$ qui tend vers l'infini à l'infini. Alors*

(i) $\mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)$ *est un espace adapté sur* $\mathrm{Sp}^h G$ *.*

(ii) On a

$$\mathcal{FL}\left(\mathcal{M}_+^G\left(\mathrm{Sp}^h G\right)\right) = \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_+^\circ$$

et $\mathcal{FL}\left(\mathcal{M}_+^G\left(\mathrm{Sp}^h G\right)\right) = \mathcal{TP}(G)$ *si, et seulement si,* $\overline{\mathcal{G}\left(\mathbb{K}_*^{(G)}\right)} = \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_+$.

Démonstration de (i) Etant donné $\mathcal{G}\varphi \in \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_+$, on a

$$\mathcal{G}\varphi^2 + \kappa^2 \in \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_+$$

et, pour tout $\varepsilon \in \left]0,1\right]$, la partie $\left\{\kappa \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\right\} \cap \left\{\mathcal{G}\varphi \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\right\}$ est compacte. Hors de cette partie on a " $\kappa > \frac{1}{\varepsilon}$ et $\mathcal{G}\varphi \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$ " ou " $\mathcal{G}\varphi > \frac{1}{\varepsilon}$ " et dans les deux cas il vient

$$\frac{\mathcal{G}\varphi}{\mathcal{G}\varphi^2 + \kappa^2} \leqslant \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{1}{\varepsilon^2}} = \varepsilon ,$$

ce qui montre que $\mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)$ est adapté sur $\mathrm{Sp}^h G$.

Démonstration de (ii) Si $f \in \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_+^\circ$, alors

$$\mathcal{G}\varphi \longmapsto \langle \mathcal{G}\varphi | f\rangle = \langle \varphi | f\rangle : \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est une forme linéaire positive ; elle est donc, par (i) et le théorème de Riesz, représentable par une intégrale de Radon positive $\mu \in \mathcal{M}_+^G\left(\mathrm{Sp}^h G\right)$. Quant à la seconde partie on a $\mathcal{G}\left(\overline{\mathbb{K}_*^{(G)}}\right) = \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_+$ si, et seulement si, $\mathcal{G}\left(\mathbb{K}_*^{(G)}\right)^\circ = \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_+^\circ$, d'où le résultat puisque $\mathcal{TP}(G) = \mathbb{K}_*^{(G)\circ} = \mathcal{G}\left(\mathbb{K}_*^{(G)}\right)^\circ$. □

REMARQUE 2 Au contraire des fonctions de type positif exponentiellement bornée (théorème 2.6.iv), la représentation intégrale de $f \in \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_+^\circ \smallsetminus \mathcal{TP}^{eb}(G)$ n'est pas nécessairement unique comme le montre l'exemple de Stieltjes ci-dessous. En d'autre termes la transformation de Fourier-Laplace $\mathcal{FL} : \mathcal{M}_+^G\left(\mathrm{Sp}^h G\right) \longrightarrow \mathcal{TP}(G)$ n'est pas nécessairement injective.

Nous pouvons résumer les différents résultats obtenus jusqu'ici dans le diagramme suivant. Rappelons les hypothèses : G est un monoïde discret, $\mathrm{Sp}^h G$ sépare les points de G , et toute forme linéaire positive sur $\mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)$ est représentée par une intégrale de Radon positive sur $\mathrm{Sp}^h G$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{Dualité} & & & & & \\
\mathbb{K}_*^{(G)} \subset & \mathbb{K}^{(G)} \arrow[d, hook, "\mathcal{G}"', "\cong"] & \vert & \mathbb{K}^G & = & \mathcal{FL}\left(\mathcal{M}^G\left(\mathrm{Sp}^h G\right)\right) & \supset & \mathcal{TP}(G) \arrow[d, phantom, "\cup"] \\
\mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_+ \subset & \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right) \arrow[d, hook] & \vert & \mathcal{M}^G\left(\mathrm{Sp}^h G\right) \arrow[u, "\mathcal{FL}"'] & \supset & \mathcal{M}_+^G\left(\mathrm{Sp}^h G\right) \arrow[rr, two heads, "\mathcal{FL}"] \arrow[d, phantom, "\cup"] & & \mathcal{FL}\left(\mathcal{M}_+^G\left(\mathrm{Sp}^h G\right)\right) \\
\mathcal{C}_+\left(\mathrm{Sp}^h G\right) \subset & \mathcal{C}\left(\mathrm{Sp}^h G\right) \arrow[d] & \vert & \mathcal{M}^c\left(\mathrm{Sp}^h G\right) \arrow[u, hook] & \supset & \mathcal{M}_+^c\left(\mathrm{Sp}^h G\right) \arrow[rr, hook, two heads] \arrow[d, phantom, "\cup"] & & \mathcal{TP}^{eb}(G) \arrow[d, phantom, "\cup"] \\
\mathcal{C}_+\left(\mathrm{Sp}^b G\right) \subset & \mathcal{C}\left(\mathrm{Sp}^b G\right) & \vert & \mathcal{M}\left(\mathrm{Sp}^b G\right) \arrow[u, hook] & \supset & \mathcal{M}_+\left(\mathrm{Sp}^b G\right) \arrow[rr, hook, two heads, "\cong"] & & \mathcal{TP}^b(G)
\end{tikzcd}$$

EXEMPLE Si G est commutatif de type fini, i.e. il existe une partie finie $S \subset G$ telle que, pour tout $u \in G$, il existe $\alpha = (\alpha_s)_{s \in S} \in \mathbb{N}^S$ satisfaisant à $u = \sum_{s \in S} \alpha_s \cdot s$. Alors $\mathrm{Sp}^h G$ est isomorphe à un sous-monoïde de $\mathbb{K}^S$ et la fonction $\sum_{s \in S} |\mathcal{G}s|^2 \in \mathcal{G}\left(\mathbb{K}_*^{(G)}\right)$ tend vers l'infini à l'infini.

L'application

$$\mathrm{pr}_S : \mathbb{K}^G \supset \mathrm{Sp}^h G \longrightarrow \mathbb{K}^S : \chi \longmapsto (\chi(s))_{s \in S}$$

est évidemment un homomorphisme sur un sous-monoïde de $\mathbb{K}^S$, puisque $\mathrm{Sp}^h G$ est muni de la multiplication ponctuelle induite par $\mathbb{K}^G$. Il est injectif, car pour tout $u \in G$, on a

$$\chi(u) = \prod_{s \in S} \chi(s)^{\alpha_s} \ .$$

On a $\sum_{s\in S} |\mathcal{G}s|^2 = \sum_{s\in S} \mathcal{G}(s^* s) \in \mathcal{G}\left(\mathbb{K}_*^{(G)}\right) \subset \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_+$ et la partie $\left\{\sum_{s\in S} |\mathcal{G}s|^2 \leqslant M\right\} \subset \operatorname{Sp}^h G \subset \mathbb{K}^G$ est compacte. En effet elle est contenue dans $K_M := \bigcap_{s\in S} \left\{|\mathcal{G}s| \leqslant \sqrt{M}\right\}$, qui est compacte, car elle est fermée et, pour tout $u \in G$, la partie $|K(u)|$ est contenue dans la boule de rayon $\sqrt{M}^{|\alpha|_1}$. $\square$

REMARQUE 3 Berg, Christensen et Ressel prétendent que $\operatorname{Sp}^h G$ est homéomorphe à un sous-monoïde **fermé** de $\mathbb{K}^S$, donc qu'il est localement compact (cf. [BeChRe 1984], proposition 6.1.6). Leur démonstration ne me semble pas être correcte. Comme nous l'avons vu ci-dessus on peut se placer dans le cadre des espaces topologiques complétement réguliers et modifier les démonstrations pour tenir compte des complications liées aux intégrales de Radon sur ces espaces.

2.8 Le monoïde $\mathbb{N}^n$ et le problème des moments

Le cas du monoïde $\mathbb{N}$.

Il ne possède qu'une seule involution : $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ d'après l'exercice 2.1. Nous savons (proposition 2.1.1) que $\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{EXP}(\mathbb{N}) : r \longmapsto r^{\mathrm{id}}$ est un isomorphisme de monoïde topologique, ce qui nous permet de les identifier, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\mathcal{G}k = \mathrm{id}^k : r \longmapsto r^k \ .$$

Ainsi $\mathcal{G}\left(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}\right) = \mathrm{lin}\left(\mathrm{id}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est l'espace vectoriel des polynômes réels $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\mathcal{P}(\mathbb{R})_+ = \mathcal{G}\left(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}\right)_+ = \mathcal{G}\left(\mathbb{R}_*^{(\mathbb{N})}\right) \ .$$

En effet tout polynôme $p \geqslant 0$ a des racines réelles nécessairement de multiplicité paire et des racines complexes deux à deux conjugées, ce qui montre que $p = \overline{q} \cdot q$, où q est un polynôme complexe. Ecrivant $q = \mathrm{Re}\, q + i \cdot \mathrm{Im}\, q$, on obtient $p = (\mathrm{Re}\, q)^2 + (\mathrm{Im}\, q)^2 \in \mathcal{G}\left(\mathbb{R}_*^{(\mathbb{N})}\right)$, puisque $\mathrm{Re}\, q, \mathrm{Im}\, q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ sont des polynômes réels. Nous avons donc résolu le *problème des moments de Hamburger* :

PROPOSITION 1 *Pour qu'une suite $f = (f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ soit la suite des moments de $\mu \in \mathcal{M}_+^{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$, i.e. que*

$$f_k = \int \mathrm{id}^k \, d\mu \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N} \ ,$$

il faut et il suffit que $f \in \mathcal{TP}(\mathbb{N})$.

EXEMPLE 1 (Stieltjes) En faisant le changement de variable $t = u^4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\int_0^\infty t^n \cdot \sin t^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-t^{\frac{1}{4}}} \, dt = 4 \int_0^\infty u^{4n+3} \cdot \sin u \cdot e^{-u} \, du = 4 \,\mathrm{Im} \int_0^\infty u^{4n+3} \cdot e^{(i-1)\cdot u} \, du = 0 \ ,$$

car

$$\int_0^\infty u^{4n+3} \cdot e^{(i-1)\cdot u} \, du = \left[u^{4n+3} \cdot \frac{e^{(i-1)\cdot u}}{i-1} \right]_0^\infty - \int_0^\infty (4n+3)\, u^{4n+2} \cdot \frac{e^{(i-1)\cdot u}}{i-1} \, du =$$

$$= \ldots = (-1)^{4n+3} \cdot \frac{(4n+3)!}{(i-1)^{4n+3}} \cdot \int_0^\infty e^{(i-1)\cdot u} \, du = -\frac{(4n+3)!}{(i-1)^{4n+4}} \cdot \left[e^{(i-1)\cdot u} \right]_0^\infty =$$

$$= \frac{(4n+3)!}{2^{4n+4}} \cdot (1+i)^{4n+4} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(4n+3)!}{4^{n+1}} \ ,$$

en remarquant que $(1+i)^4 = -4$. Ceci montre que l'intégrale de Radon réelle $\sin\left(\mathrm{id}^{\frac{1}{4}}\right) \cdot e^{-\mathrm{id}^{\frac{1}{4}}} \cdot \lambda_{\mathbb{R}_+}$ induit la forme linéaire 0 sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, ou bien que les intégrales de Radon positives

$$\sin_+\left(\mathrm{id}^{\frac{1}{4}}\right) \cdot e^{-\mathrm{id}^{\frac{1}{4}}} \cdot \lambda_{\mathbb{R}_+} \quad \text{et} \quad \sin_-\left(\mathrm{id}^{\frac{1}{4}}\right) \cdot e^{-\mathrm{id}^{\frac{1}{4}}} \cdot \lambda_{\mathbb{R}_+} \ ,$$

évidemment différentes, ont les mêmes moments.

REMARQUE 1 On peut se poser la question de l'unicité en restreignant le support de μ . La restriction à $\mathbb{R}_+$, on dit que c'est le *problème des moments de Stieltjes* , ne conduit pas à l'unicité comme nous venons de le voir. On peut montrer que les suites des moments des $\mu \in \mathcal{M}_+^{\mathbb{N}}(\mathbb{R}_+)$ sont exactement les fonctions f sur $\mathbb{N}$ telles que f , $\tau_1 f \in \mathcal{TP}(\mathbb{N})$. Dans ce cas on obtient évidemment par récurrence que $\tau_k f \in \mathcal{TP}(\mathbb{N})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Par contre on a unicité en se restreignant à $[0,1] = \mathcal{EXP}_+^b(\mathbb{N})$; c'est le problème des moments de Hausdorff que nous avons déjà résolu (cf. exemple 2.3.1). Les suites des moments des $\mu \in \mathcal{M}_+^{\mathbb{N}}([0,1])$ sont exactement les fonctions complètement monotones sur $\mathbb{N}$: on a $\mathcal{FCM}(\mathbb{N}) \subset \mathcal{TP}^b(\mathbb{N})$.

Le cas du monoïde $\mathbb{N}^n$ pour $n \geqslant 1$, muni de l'involution $\mathrm{id}_{\mathbb{N}^n}$

Cet exemple a été complètement traité par C. Berg, J.P.R. Christensen et C.U. Jensen [BeChJe 1979] et repris mot à mot dans [BeChRe 1984].

On a $\mathrm{Sp}\,\mathbb{N}^n = \mathcal{EXP}(\mathbb{N}^n)$ et utilisant la proposition 2.1.1 et l'exercice 2.2, on voit que

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow (\mathcal{EXP}(\mathbb{N}))^n \cong \mathcal{EXP}(\mathbb{N}^n) : x \longmapsto x^{\mathrm{id}}$$

est un isomorphisme de groupe topologiques, la fonction exponentielle associée à x étant

$$x^{\mathrm{id}} : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{R} : k \longmapsto x^k := \prod_{j \in n} x_j^{k_j} .$$

Pour tout $a \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$, la fonction a^{id} est une fonction exponentielle, mais aussi une valeur absolue sur $\mathbb{N}^n$, et $\mathcal{TP}^{a^{\mathrm{id}}}(\mathbb{N}^n)$ est l'ensemble des fonctions de type positif f sur $\mathbb{N}^n$ telles qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ et que

$$|f(k)| \leqslant c \cdot \prod_{j \in n} a_j^{k_j} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^n .$$

En outre $\mathcal{EXP}^{a^{\mathrm{id}}}(\mathbb{N}^n)$ est homéomorphe à $[-a,a] = \prod_{j \in n}[-a_j,a_j] \subset \mathbb{R}^n$ et en particulier $\mathcal{EXP}^b(\mathbb{N}^n)$ est homéomorphe à $[-1,1]^n$, car si $x^{\mathrm{id}} \in \mathcal{EXP}^{a^{\mathrm{id}}}(\mathbb{N}^n)$, on a $\left|x^{\mathrm{id}}\right| \leqslant c \cdot a^{\mathrm{id}}$ pour un certain $c \in \mathbb{R}_+$, donc en particularisant $|x_j|^k \leqslant c \cdot a_j^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et par suite $|x_j| \leqslant \lim_k c^{\frac{1}{k}} \cdot a_j = a_j$, ce qui montre que $x \in [-a,a]$.

Utilisant le théorème 2.6.iv, on voit que tout $f \in \mathcal{TP}^{a^{\mathrm{id}}}(\mathbb{N}^n)$ est univoquement représentable par une intégrale de Radon $\mu \in \mathcal{M}_+^{\mathbb{N}^n}([-a,a])$; on a

$$f(k) = \int_{[-a,a]} x^k \, d\mu(x) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^n .$$

En particulier f est bornée si, et seulement si, $\mathrm{supp}\,\mu \subset [-1,1]^n$.

La transformée de Gelfand de $\varphi \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N}^n)}$ est le polynôme réel à n variables

$$\mathcal{G}\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \langle x | \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} \varphi(k) \cdot x^k ;$$

$\mathcal{G}\left(\mathbb{R}^{(\mathbb{N}^n)}\right)$ est donc l'espace vectoriel $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ de tous ces polynômes. Ainsi $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)_+$ est le cône convexe des polynômes positifs, tandis que $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)_* := \mathcal{G}\left(\mathbb{R}_*^{(\mathbb{N}^n)}\right)$ est le cône convexe des sommes finies de carrés de polynômes.

Nous avons montré ci-dessus que $\mathcal{P}(\mathbb{R})_+ = \mathcal{P}(\mathbb{R})_*$, et $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)_* \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)_+$, mais

$$\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^2\right)_* \neq \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^2\right)_+$$

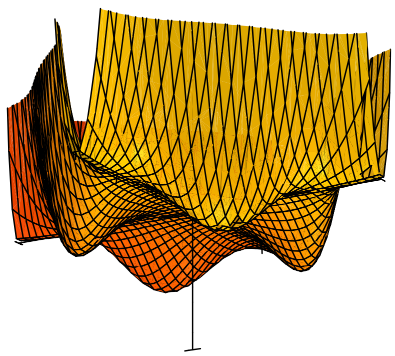
comme le montre l'exemple suivant :

EXEMPLE 2 Le polynôme

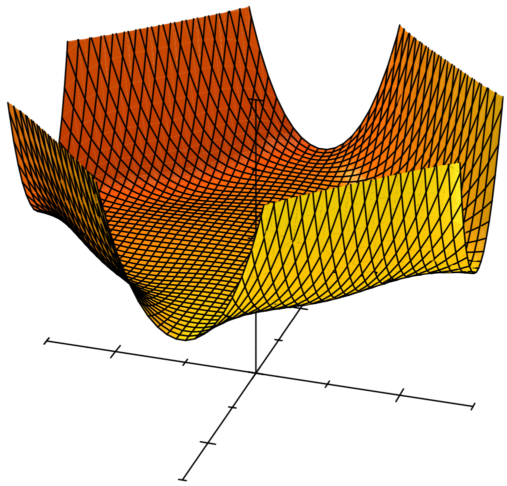
$$p = \mathrm{pr}_1^2 \cdot \mathrm{pr}_2^2 \cdot \left(\mathrm{pr}_1^2 + \mathrm{pr}_2^2 - 1\right) + 1 \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^2\right)_+ \smallsetminus \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^2\right)_* \ .$$

Plus précisément

$$\mathrm{pr}_1^2 \cdot \mathrm{pr}_2^2 \cdot \left(\mathrm{pr}_1^2 + \mathrm{pr}_2^2 - 1\right) \geqslant -\frac{1}{3^3} \ .$$



$$\begin{array}{ccc} (x,y) & \longmapsto & x^2 \cdot y^2 \cdot \left(x^2+y^2-1\right) \\ [-1.5,1.5]^2 & \longrightarrow & [-0.1,0.1] \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc} (x,y) & \longmapsto & x^2 \cdot y^2 \cdot \left(x^2+y^2-1\right)+1 \\ [-1.5,1.5]^2 & \longrightarrow & [0,2] \end{array}$$

Si $\mathrm{pr}_1^2 + \mathrm{pr}_2^2 \geqslant 1$, on a trivialement $p \geqslant 1$. Si $\mathrm{pr}_1^2 + \mathrm{pr}_2^2 \leqslant 1$, on a $\mathrm{pr}_1^2 \cdot \mathrm{pr}_2^2 \leqslant 1$, donc $\mathrm{pr}_1^2 \cdot \mathrm{pr}_2^2 \cdot (\mathrm{pr}_1^2 + \mathrm{pr}_2^2 - 1) \geqslant -1$. Soyons plus précis. Par symétrie il suffit d'étudier ce polynôme sur $\mathbb{R}_+^2$. On a $p(x,0) = p(0,y) = 1$ et $p(x) \geqslant 1$ si $|x| \geqslant 1$. Il atteint donc son minimum absolu sur $\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{R}_+^2$. Mais sur cet ensemble on a

$$\operatorname{grad} p(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \cdot y^2 \cdot \left(x^2+y^2-1\right) + x^2 \cdot y^2 \cdot 2x \\ x^2 \cdot 2y \cdot \left(x^2+y^2-1\right) + x^2 \cdot y^2 \cdot 2y \end{pmatrix} = 2xy \cdot \begin{pmatrix} y \cdot \left(2x^2+y^2-1\right) \\ x \cdot \left(x^2+2y^2-1\right) \end{pmatrix} = 0$$

si, et seulement si, " $x = 0$ " ou " $y = 0$ " ou " $x = y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ " et comme

$$p\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1\right) + 1 = \frac{26}{27} < 1 \ ,$$

on voit que ce minimum est en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Ainsi $p \geqslant \frac{26}{27}$.

Supposons maintenant que $p = \sum_{j \in N} q_j^2$ pour certains $q_j \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^2\right)$ que nous écrivons sous la forme

$$q_j(x,y) = c_j + x \cdot a_j(x) + y \cdot b_j(y) + xy \cdot r_j(x,y) \ ,$$

où a_j, b_j, r_j sont des polynômes. Puisque

$$1 = p(x,0) = \sum_{j \in N} q_j^2(x,0) = \sum_{j \in N} \left[c_j^2 + 2c_j \cdot x \cdot a_j(x) + x^2 \cdot a_j^2(x)\right] \ ,$$

on obtient en comparant les coefficients

$$\sum_{j \in N} c_j^2 = 1 \quad , \quad \sum_{j \in N} c_j \cdot a_j(x) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j \in N} a_j^2(x) = 0 \ ,$$

donc $a_j = 0$. On prouve de la même manière que $b_j = 0$. Ainsi

$$q_j(x,y) = c_j + xy \cdot r_j(x,y) \ ,$$

donc

$$x^2 \cdot y^2 \cdot \left(x^2 + y^2 - 1\right) + 1 = \sum_{j \in N} c_j^2 + 2\sum_{j \in N} c_j xy \cdot r_j(x,y) + \sum_{j \in N} x^2 \cdot y^2 \cdot r_j^2(x,y) \ ;$$

le membre de gauche étant de degré 6 , on a nécessairement $\deg r_j \leqslant 1$ et, en comparant le coefficient de $x^2 \cdot y^2$ il vient

$$x^2 + y^2 - 1 = \sum_{j \in N} r_j^2(x,y) \geqslant 0 \ ,$$

ce qui est absurde. Nous avons fini de prouver que $p \notin \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)_*$. ——— □

PROPOSITION 2 *Si $n \geqslant 2$, le cône convexe $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)_*$ est fermé dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ et $\neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)_+$. En particulier $\mathcal{FL}\left(\mathcal{M}_+^{\mathbb{N}^n}(\mathbb{R}^n)\right) \neq \mathcal{TP}(\mathbb{N}^n)$, i.e. il existe une fonction de type positif sur $\mathbb{N}^n$ qui n'est pas une suite de moments.*

Le polynôme p construit dans l'exemple 2 ci-dessus peut évidemment être considéré comme un élément de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)_+$. Pour montrer qu'il n'appartient pas à $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)_*$, il suffit de constater que la démonstration ne change pas si les polynômes a_j, b_j, r_j dépendent en plus des variables supplémentaires.

Si $d \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}_d(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace vectoriel de dimension finie des polynômes de degré $\leqslant d$, montrons tout d'abord que $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)_* \cap \mathcal{P}_d(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans $\mathcal{P}_d(\mathbb{R}^n)$.

Soit R une partie de $\mathbb{R}$ ayant $d+1$ points. Rappelons qu'un polynôme à une variable de degré $\leqslant d$ a au plus d zéros (division !) ; s'il s'annule sur R , il est donc nul. Ainsi si $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ s'annule sur R^n , il est aussi nul : en effet par récurrence si $u \in R^{n-1}$, le polynôme à une variable $p(\cdot, u)$ s'annule sur R , donc est nul quel que soit $u \in R^{n-1}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le polynôme à $n-1$ variables $p(x, \cdot)$ s'annule sur R^{n-1} , donc est nul par l'hypothèse de récurrence, ce qui finit de prouver que $p = 0$. La topologie de la convergence ponctuelle sur R^n , qui est par suite séparée, est identique à la topologie localement convexe canonique sur $\mathcal{P}_d(\mathbb{R}^n)$. Si $D := \dim \mathcal{P}_d(\mathbb{R}^n)$, alors tout polynôme $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)_* \cap \mathcal{P}_d(\mathbb{R}^n)$ s'écrit sous la forme

$$p = \sum_{j \in D} p_j^2 \ .$$

En effet si $p = \sum_{j \in N} p_j^2$ et $N < D$, il suffit de poser $p_j := 0$ pour $N < j \leqslant D$. Si $N > D$, la suite $\left(p_j^2\right)_{j \in N}$ n'est pas libre et il existe une combinaison linéaire $\sum_{j \in N} c_j \cdot p_j^2 = 0$. Si $k \in N$ est tel que $|c_k|$ soit maximum, en changeant les signes nous pouvons supposer que $c_k > 0$, alors

$c_k \geqslant |c_j| \geqslant c_j$, donc $1 - \frac{c_j}{c_k} \geqslant 0$ pour tout $j \in N$ et

$$p = \sum_{j \in N} p_j^2 - \sum_{j \in N} \frac{c_j}{c_k} \cdot p_j^2 = \sum_{j \in N \setminus \{k\}} \left(1 - \frac{c_j}{c_k}\right) \cdot p_j^2 \ .$$

Par récurrence descendante on obtient le résultat.

Soit maintenant une suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)_* \cap \mathcal{P}_d(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers p dans $\mathcal{P}_d(\mathbb{R}^n)$. En écrivant

$$p_k = \sum_{j \in D} p_{k,j}^2 \quad \text{pour certains } p_{k,j} \in \mathcal{P}_d(\mathbb{R}^n) \ ,$$

les suites $(p_k(r))_{k \in \mathbb{N}}$ pour $r \in R^n$ sont convergentes, donc bornées dans $\mathbb{R}$. Il en est donc de même des suites $\left(p_{k,j}^2(r)\right)_{k \in \mathbb{N}}$, et par suite des suites $(p_{k,j}(r))_{k \in \mathbb{N}}$, pour $r \in R^n$ et $j \in D$. Par le théorème de Bolzano-Weierstraß (appliqué $D \cdot (D+1)^n$-fois !), il existe une sous-suite $(k_l)_{l \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_l p_{k_l,j}(r)$ existe pour tout $r \in R^n$ et $j \in D$. Puisque la topologie de la convergence ponctuelle sur R^n est la même que celle de la convergence des coefficients, on en déduit $p_j := \lim_l p_{k_l,j} \in \mathcal{P}_d(\mathbb{R}^n)$ et

$$\lim_l p_{k_l,j}^2 = (\lim_l p_{k_l,j})^2 = p_j^2 \ ,$$

donc que

$$p = \lim_k p_k = \lim_l p_{k_l} = \lim_l \sum_{j \in D} p_{k_l,j}^2 = \sum_{j \in D} p_j^2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)_* \cap \mathcal{P}_d(\mathbb{R}^n) \ .$$

Nous allons maintenant utiliser le

THÉORÈME (de Krein-Šmulian) *Si F est un espace de Fréchet, alors toute partie convexe C de $F^\dagger$ est fermée si, et seulement si, $C \cap \mathrm{co}_\rho$ est (faiblement) fermée pour toute semi-norme continue ρ sur F .*

C'est une conséquence du théorème de Banach-Dieudonné (cf. Bourbaki [Bou 1981], EVT, chap. IV, §3, no. 5, corollaire 2, p. 25). Remarquer que la fermeture d'une partie convexe de $F^\dagger$ est la même qu'elle que soit la topolgie localement convexe sur $F^\dagger$ compatible avec la semi-dualité $\left\langle F \middle| F^\dagger \right\rangle$.

En effet $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}$ est un espace de Fréchet, puisque $\mathbb{N}^n$ est dénombrable, et son dual est $\mathbb{R}^{(\mathbb{N}^n)}$. Les semi-normes de la forme $\|\cdot\|_{\infty,K}$, pour $K \in \mathfrak{P}^f(\mathbb{N}^n)$, définissant la topologie de la convergence ponctuelle, on vérifie facilement si ρ est une semi-norme continue, donc $\rho \leqslant c \cdot \|\cdot\|_{\infty,K}$ pour certains $K \in \mathfrak{P}^f(\mathbb{N}^n)$ et $c \in \mathbb{R}_+$, que $\mathrm{co}_\rho \subset \mathbb{R}^K \subset \mathbb{R}^{(\mathbb{N}^n)}$. Mais d'après ce que nous avons vu ci-dessus, dans le langage des polynômes via la transformation de Gelfand, $\mathbb{R}_*^{(\mathbb{N}^n)} \cap \mathbb{R}^K$ est fermé, donc aussi $\mathbb{R}_*^{(\mathbb{N}^n)} \cap \mathrm{co}_\rho$, ce qui finit de prouver que $\mathbb{R}_*^{(\mathbb{N}^n)}$ est fermé pour la topologie localement convexe la plus fine sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N}^n)}$, qui est évidemment compatible avec la semi-dualité $\left\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n} \middle| \mathbb{R}^{(\mathbb{N}^n)} \right\rangle$. □

REMARQUE 2 On peut aussi généraliser le problème des moments de Stieltjes. On dit qu'une fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}$ est *complétement de type positif* si pour tout $k \in \mathbb{N}^n$, on a $\tau_k f \in \mathcal{TP}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}\right)$, on désigne l'ensemble de ces fonctions par $\mathcal{CTP}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}\right)$. On dit que f est une *suite de moments de Stieltjes* si $f(k) = \int \mathrm{id}^k \, d\mu$ pour une intégrale de Radon $\mu \in \mathcal{M}_+^{\mathbb{N}^n}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$; $\mathcal{FL}\left(\mathcal{M}_+^{\mathbb{N}^n}\left(\mathbb{R}_+^n\right)\right)$ est donc l'ensemble de ces fonctions.

Soit $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)_{**}$ le cône convexe engendré par les polynômes de la forme $\mathrm{id}^k \cdot p^2$ pour $k \in \mathbb{N}^n$ et $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. On peut montrer que

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)_{**} = \sum_{k \in \{0,1\}^n} \mathrm{id}^k \cdot \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)_* \ ,$$

qu'une fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}$ est complétement de type positif si, et seulement si, $\langle p | f \rangle \geqslant 0$ pour tout $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)_{**}$, que $\mathcal{CTP}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}\right)$ est fermé dans $\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}\right)$, que si p désigne le polynôme de Robinson

$$p := \mathrm{pr}_1^2 \cdot \left(\mathrm{pr}_1^2 - 1\right)^2 + \mathrm{pr}_2^2 \cdot \left(\mathrm{pr}_2^2 - 1\right)^2 - \left(\mathrm{pr}_1^2 - 1\right) \cdot \left(\mathrm{pr}_2^2 - 1\right) \cdot \left(\mathrm{pr}_1^2 + \mathrm{pr}_2^2 - 1\right) \ ,$$

alors $p(\cdot - 2, \cdot - 2) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)_+ \setminus \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)_{**}$, et finalement qu'il existe des fonctions complétement de type positif qui ne sont pas des suites de moments.

En outre le théorème caractérisant les suites de moments de Stieltjes sur $\mathbb{N}$ (remarque 1) n'est plus valable si $n \geqslant 2$. Il existe même une fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}$ telle que $\tau_k f \in \mathcal{FL}\left(\mathcal{M}_+^{\mathbb{N}^n}\left(\mathbb{R}_+^n\right)\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^n$ qui n'est pas une suite de moments de Stietjes. Pour résoudre ce problème il faut introduire le cône convexe $\mathcal{P}\left(\mathbb{R}_+^n\right)_+$ des polynômes qui sont positif sur $\mathbb{R}_+^n$ et le cône convexe $\mathcal{P}\left(\mathbb{R}_+^n\right)_{**}$ engendré par les polynômes de la forme $\mathrm{id}^k \cdot p$ pour $k \in \mathbb{N}^n$ et $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)_+$. On a

$$\mathcal{P}\left(\mathbb{R}_+^n\right)_{**} = \sum_{k \in \{0,1\}^n} \mathrm{id}^k \cdot \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)_+ \ ,$$

ce cône est fermé, son polaire

$$\mathcal{P}\left(\mathbb{R}_+^n\right)_{**}^{\circ} = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n} \ \middle|\ \tau_k f \in \mathcal{FL}\left(\mathcal{M}_+^{\mathbb{N}^n}\left(\mathbb{R}_+^n\right)\right) \text{ pour tout} k \in \mathbb{N}^n \right\}$$

et $\mathcal{P}\left(\mathbb{R}_+^n\right)_+ \setminus \mathcal{P}\left(\mathbb{R}_+^n\right)_{**} \neq \emptyset$. Cette dernière assertion découle du fait que

$$\mathrm{pr}_1 \cdot \mathrm{pr}_2 \cdot (\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 - 1) + 1 \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}_+^2\right)_+ \setminus \mathcal{P}\left(\mathbb{R}_+^2\right)_{**} \ .$$

Le cas du monoïde $\mathbb{N}^2$, muni de l'involution $\% : (k_1, k_2) \longmapsto (k_2, k_1)$

D'après la proposition 2.1.1 les caractères complexes de $\mathbb{N}$ sont les fonctions z^{id} pour $z \in \mathbb{C}$. Les caractères complexes de $\mathbb{N}^2$ sont donc aussi de la forme

$$z^{\mathrm{id}} : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{C} : k \longmapsto z_1^{k_1} \cdot z_2^{k_2}$$

pour $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Un tel caractère est hermitien si, et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}^2$, on a

$$z_1^{k_1} \cdot z_2^{k_2} = \overline{z_1^{k_2} \cdot z_2^{k_1}} = \overline{z_1}^{k_2} \cdot \overline{z_2}^{k_1} \ .$$

En prenant $k_1 = 0$ et $k_2 = 1$, on obtient $z_2 = \overline{z_1}$, ce qui montre que

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{Sp}\left(\mathbb{N}^2, \%\right) : z \longmapsto (z, \overline{z})^{\mathrm{id}} \ ,$$

où

$$(z, \overline{z})^{\mathrm{id}} : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{C} : k \longmapsto z^{k_1} \cdot \overline{z}^{k_2} \ ,$$

est un isomorphisme de groupe topologique. L'image de $\mathbb{B}_1$ est $\mathrm{Sp}^b(\mathbb{N}^2, \%)$.

Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, il est clair que $a^{|\mathrm{id}|_1} : k \longmapsto a^{k_1 + k_2}$ est une valeur absolue et que toute fonction de type positif f sur $(\mathbb{N}^2, \%)$, telles qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ et que

$$|f(k)| \leqslant c \cdot a^{k_1 + k_2} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^2 \ ,$$

est univoquement représentable par un intégrale de Radon $\mu \in \mathcal{M}_+^{(\mathbb{N}^2,\%)}(\mathbb{B}_a)$, où $\mathbb{B}_a := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant a\}$; on a

$$f(k) = \int_{|z| \leqslant a} z^{k_1} \cdot \overline{z}^{k_2} \, d\mu(z) \ .$$

Comme dans l'exemple précédent on peut montrer qu'il existe une fonction de type positif qui n'est pas une suite de moments.

2.9 Fonctions relativement de type positif sur un monoïde involutif

DÉFINITION 1 Si G est un monoïde involutif, on dit qu'une fonction $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ est *relativement de type positif* si le noyau

$$\varkappa_f : (s,t) \longmapsto f(t^* s)$$

est relativement de type positif.

Rappelons que la condition d'hermiticité signifie que

$$f(s^*) = \overline{f(s)} \quad \text{pour tout } s \in G \ .$$

En particulier $f(e) \in \mathbb{R}$. On vérifie facilement que l'ensemble $\mathcal{RTP}(G)$ formé de fonctions relativement de type positif est un cône convexe fermé dans $\mathbb{C}^G$. On a $\mathcal{TP}(G) \subset \mathcal{RTP}(G)$.

EXEMPLE 1 On a $1 \in \mathcal{TP}(G)$, mais $-1 \in \mathcal{RTP}(G) \setminus \mathcal{TP}(G)$!

EXEMPLE 2 Un homomorphisme hermitien $\ell \in \mathrm{Hom}_h(G, \mathbb{K})$, i.e. $\ell(st) = \ell(s) + \ell(t)$ et $\ell(s^*) = \overline{\ell(s)}$ pour tout $s, t \in G$, est relativement de type positif.

En particulier

$$\mathbb{R} \oplus \mathrm{Hom}_h(G, \mathbb{K}) \subset \mathcal{RTP}(G)$$

et $\mathbb{R} \oplus \mathrm{Hom}_h(G, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel réel.

En effet $\varkappa_\ell = |\ell\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle \ell|$, puisque

$$\varkappa_\ell(s,t) = \ell(t^* s) = \ell(s) + \overline{\ell(t)} = \Big[|\ell\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle \ell| \Big](s,t) \ ,$$

d'où le résultat par l'exemple 2.5.2. □

Dans le reste de ce paragraphe
$G = (G, \diamond^*)$ est un monoïde involutif commutatif.

DÉFINITION 2 Une fonction $q : G \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *quadratique* si, pour tout $s, t \in G$, on a

$$q(s+t) + q(s+t^*) = 2 \cdot (q(s) + q(t)) \ . \qquad (*)$$

LEMME

(i) La partie réelle d'un homomorphisme hermitien est une fonction quadratique

(ii) Réciproquement si l'involution est id_G , *donc* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *alors une fonction quadratique est un homomorphisme hermitien.*

Démonstration de (i) Si ℓ est un homomorphisme hermitien, alors $\operatorname{Re}\ell$ satisfait en particulier à $\operatorname{Re}\ell\,(s^*) = \operatorname{Re}\ell\,(s)$ pour tout $s \in G$, donc

$$\operatorname{Re}\ell\,(s+t) + \operatorname{Re}\ell\,(s+t^*) = \operatorname{Re}\ell\,(s) + \operatorname{Re}\ell\,(t) + \operatorname{Re}\ell\,(s) + \operatorname{Re}\ell\,(t) = 2 \cdot (\operatorname{Re}\ell\,(s) + \operatorname{Re}\ell\,(t)) \ .$$

Démonstration de (ii) C'est immédiat. □

PROPOSITION *Si q est une forme quadratique, pour tout $r, s, t \in G$, on a*

(i)
$$q\,(0) = 0 \qquad et \qquad q\,(s^*) = q\,(s) \ .$$

(ii)
$$q\,(s + t + t^*) = q\,(s) + q\,(t + t^*) \ .$$

(iii)
$$q\,(n \cdot s) = n^2 \cdot q\,(s) - \frac{n\,(n-1)}{2} \cdot q\,(s + s^*) \quad pour\ tout\ n \in \mathbb{N} \ .$$

En particulier

$$\lim_n \frac{q\,(n \cdot s)}{n^2} = q\,(s) - \frac{1}{2} \cdot q\,(s + s^*) \ .$$

Considérons le noyau $\widetilde{\varkappa_q} : G \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$\widetilde{\varkappa_q}\,(s,t) := q\,(s + t^*) - q\,(s) - q\,(t)$$

On a

(iv)
$$\widetilde{\varkappa_q}\,(s,t) = \widetilde{\varkappa_q}\,(t,s) = -\widetilde{\varkappa_q}\,(s,t^*) \ .$$

(v)
$$\widetilde{\varkappa_q}\,(s,t) + \widetilde{\varkappa_q}\,(r,t) = \widetilde{\varkappa_q}\,(s+r,t) \ .$$

(vi)
$$\widetilde{\varkappa_q}\,(s,s) = -2 \cdot \lim_n \frac{q\,(n \cdot s)}{n^2} \ .$$

*(vii) Une fonction quadratique q **négative** est relativement de type positif.*

Démonstration de (i) On voit immédiatement en posant $s = t = 0$ dans $(*)$ que $q\,(0) = 0$ et, en posant $s = 0$ que $q\,(t^*) = q\,(t)$.

Démonstration de (ii) Il suffit de remplacer t par $t + t^*$ dans $(*)$.

Démonstration de (iii) Cette formule est manifestement vraie pour $n = 0, 1$. Pour $n \geqslant 2$, si cette formule est vraie par n et $n-1$, il vient

$$q\,((n+1) \cdot s) = q\,(n \cdot s + s) \underset{(*)}{=} 2q\,(n \cdot s) + 2q\,(s) - q\Big(\,(n-1) \cdot s + s + s^*\Big) =$$

$$\underset{(iii,n)\ \text{et}\ (ii)}{=} 2n^2 \cdot q\,(s) - n\,(n-1) \cdot q\,(s + s^*) + 2q\,(s) - q\,((n-1) \cdot s) - q\,(s + s^*) =$$

$$\underset{(iii,n-1)}{=} \left(2n^2 + 2\right) \cdot q\,(s) - [n\,(n-1) + 1] \cdot q\,(s^* + s) - (n-1)^2 \cdot q\,(s)$$

$$+ \frac{(n-1)\,(n-2)}{2} \cdot q\,(s + s^*) =$$

$$= \left[\left(2n^2 + 2\right) - (n-1)^2\right] \cdot q\,(s) - \left[n\,(n-1) + 1 - \frac{(n-1)\,(n-2)}{2}\right] \cdot q\,(s + s^*) =$$

$$= (n+1)^2 \cdot q(s) - \frac{n(n+1)}{2} \cdot q(s+s^*) \ ;$$

elle est donc vraie pour $n+1$.

Démonstration de (iv) Puisque $q(s+t^*) = q((t+s^*)^*) = q(t+s^*)$, on obtient évidemment $\widetilde{\varkappa_q}(s,t) = \widetilde{\varkappa_q}(t,s)$. D'autre part

$$\widetilde{\varkappa_q}(s,t) = q(s+t^*) - q(s) - q(t) \underset{(*)}{=} 2 \cdot (q(s)+q(t)) - q(s+t) - q(s) - q(t) =$$

$$= q(s) + q(t) - q(s+t) \underset{(i)}{=} -\widetilde{\varkappa_q}(s,t^*) \ .$$

Démonstration de (v) Il vient

$$\widetilde{\varkappa_q}(s,t) + \widetilde{\varkappa_q}(r,t) = q(s+t^*) - q(s) - q(t) + q(r+t^*) - q(r) - q(t) =$$

$$\underset{(*)}{=} \frac{1}{2} \cdot \left\{ q(s+t^*+r+t^*) + q(s+t^*+r^*+t) \right\} - q(s) - q(r) - 2q(t) =$$

$$\underset{(*)\text{ et }(ii)}{=} \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left[2q\left(s+r+t^*\right) + 2q(t) - q(s+r+t^*+t) \right] + \left[q(s+r^*) + q(t+t^*) \right] \right\}$$

$$-q(s) - q(r) - 2q(t) =$$

$$= q(s+r+t^*) - \frac{1}{2} \cdot \left\{ q(s+r+t+t^*) - q(s+r^*) - q(t+t^*) \right\} - q(s) - q(r) - q(t) =$$

$$\underset{(ii)}{=} q(s+r+t^*) - \frac{1}{2} q(s+r) + \frac{1}{2} q(s+r^*) - q(s) - q(r) - q(t) =$$

$$\underset{(*)}{=} q(s+r+t^*) - \frac{1}{2} q(s+r) + q(s) + q(r) - \frac{1}{2} q(s+r) - q(s) - q(r) - q(t) =$$

$$= q(s+r+t^*) - q(s+r) - q(t) = \widetilde{\varkappa_q}(s+r,t) \ .$$

Démonstration de (vi) C'est évident par (iii).

Démonstration de (vii) Il nous suffit d'après la proposition 2.5.2.i, en choisissant $\xi := 0$, de montrer que le noyau $\widetilde{\varkappa_q}$ est de type positif. Tout d'abord, pour tout $\varphi \in \mathbb{Z}^{(G)}$, posons

$$u := \sum_{\varphi(s)>0} \varphi(s) \cdot s + \sum_{\varphi(s)<0} (-\varphi(s)) \cdot s^* ;$$

puisque q est négative, utilisant (vi) il vient

$$0 \leqslant \widetilde{\varkappa_q}(u,u) =$$

$$= \widetilde{\varkappa_q}\left(\sum_{\varphi(s)>0} \varphi(s) \cdot s + \sum_{\varphi(s)<0} (-\varphi(s)) \cdot s^*, \sum_{\varphi(t)>0} \varphi(t) \cdot t + \sum_{\varphi(t)<0} (-\varphi(t)) \cdot t^* \right) =$$

$$= \sum_{\varphi(s),\varphi(t)>0} \varphi(s) \cdot \widetilde{\varkappa_q}(s,t) \cdot \varphi(t) + \sum_{\varphi(s)>0,\varphi(t)<0} \varphi(s) \cdot \widetilde{\varkappa_q}(s,t^*) \cdot (-\varphi(t))$$

$$+ \sum_{\varphi(s)<0,\varphi(t)>0} (-\varphi(s)) \cdot \widetilde{\varkappa_q}(s^*,t) \cdot \varphi(t) + \sum_{\varphi(s),\varphi(t)<0} \varphi(s) \cdot \widetilde{\varkappa_q}(s,t) \cdot \varphi(t) =$$

$$\underset{(iv)}{=} \sum_{s,t\in G} \varphi(s) \cdot \widetilde{\varkappa_q}(s,t) \cdot \varphi(t) \ .$$

Le cas $\varphi \in \mathbb{Q}^{(G)}$ s'en déduit immédiatement en chassant les dénominateurs et celui de $\varphi \in \mathbb{R}^{(G)}$ en passant à la limite. □

REMARQUE 1 La partie réelle d'un homomorphisme hermitien est relativement de type positif et une fonction quadratique. C'est donc une fonction relativement de type positif bien particulière, s'il n'est pas négatif. Nous éliminerons ce cas en exigeant qu'il soit majoré (cf. théorème 2.10.1.iii).

En effet si $\ell(s) > 0$, alors $\lim_k k \cdot \ell(k \cdot s) = \lim_k k \cdot \ell(s) = \infty$.

Ainsi les homomorphismes hermitiens qui sont purement imaginaires et les fonctions quadratiques négatives, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et l'involution n'est pas l'identité, jouent donc un rôle particulier.

Pour ne pas distinguer les deux cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, évidemment en utilisant l'involution identique sur $\mathbb{R}$, pour une fonction $f : G \longrightarrow \mathbb{K}$ nous utiliserons la notation $\operatorname{Re} f := \frac{1}{2} \cdot \left(f + \overline{f}\right)$ et nous écrirons explicitement $\frac{1}{2} \cdot \left(f - \overline{f}\right)$, et non pas $i \cdot \operatorname{Im} f$!

Remarquer qu'une fonction hermitienne f est purement imaginaire si, et seulement si, $f(s^*) = \overline{f(s)} = -f(s)$ pour tout $s \in G$.

REMARQUE 2 Si G est un groupe muni de l'involution $s \longmapsto s^* = s^{-1}$ et ℓ est un homomorphisme hermitien, alors

$$2 \operatorname{Re} l(s) = \overline{\ell(s)} + \ell(s) = \ell(s^*) + \ell(s) = \ell\left(s^{-1}s\right) = \ell(e) = 0 \ ,$$

i.e. ℓ est purement imaginaire, et réciproquement puisque

$$\ell(s^*) = -\ell(s) = \overline{\ell(s)} \ ,$$

i.e. $\operatorname{Hom}_h(G, \mathbb{C}) = \operatorname{Hom}(G, i \cdot \mathbb{R})$.

2.10 La formule de Lévy-Khintchine

Dans le cas général nous savons seulement qu'une fonction exponentiellement bornée de type positif est univoquement représentable par une intégrale de Radon à support compact dans $\mathrm{Sp}^h G$. Dans ce qui suit il sera même nécessaire de se restreindre au cas borné.

Comme la multiplication ponctuelle de caractères

$$m : \mathrm{Sp}^b G \times \mathrm{Sp}^b G \longrightarrow \mathrm{Sp}^b G : (\chi, \theta) \longmapsto \chi \cdot \theta$$

est continue, $\mathrm{Sp}^b G$ est un monoïde topologique compact. On peut donc définir une structure d'algèbre (de convolution) involutive sur $\mathcal{M}\left(\mathrm{Sp}^b G\right)$ en introduisant

$$\mathcal{M}\left(\mathrm{Sp}^b G\right) \times \mathcal{M}\left(\mathrm{Sp}^b G\right) \longrightarrow \mathcal{M}\left(\mathrm{Sp}^b G\right) : (\mu, \nu) \longmapsto \mu * \nu := m\left(\mu \otimes \nu\right)$$

et

$$\mathcal{M}\left(\mathrm{Sp}^b G\right) \longrightarrow \mathcal{M}\left(\mathrm{Sp}^b G\right) : \mu \longmapsto \overline{\mu} := \overline{\mu\left(\overline{\diamond}\right)} \ ,$$

c'est-à-dire que, pour toute fonction continue $\zeta \in \mathcal{C}\left(\mathrm{Sp}^b G\right)$, on a

$$\int \zeta \, d\left(\mu * \nu\right) := \int \zeta \circ m \, d\left(\mu \otimes \nu\right) = \int \left(\int \zeta\left(\chi \cdot \theta\right) \, d\mu\left(\chi\right) \right) \, d\nu\left(\theta\right)$$

et

$$\int \zeta \, d\overline{\mu} = \overline{\int \overline{\zeta} \, d\mu} \ .$$

Nous munirons $\mathcal{M}\left(\mathrm{Sp}^b G\right)$ de la topologie faible $\sigma\left(\mathcal{M}\left(\mathrm{Sp}^b G\right), \mathcal{C}\left(\mathrm{Sp}^b G\right)\right)$.

Rappelons que nous avons défini la transformée de Gelfand de $\varphi \in \mathbb{K}^{(G)}$ (définition 2.7.1) par

$$\mathcal{G}\varphi\left(\chi\right) := \sum_{s \in G} \overline{\chi\left(s\right)} \cdot \varphi\left(s\right) \ .$$

On a

$$\mathcal{G}s\left(\chi\right) := \mathcal{G}1_{\{s\}}\left(\chi\right) = \overline{\chi\left(s\right)} \ .$$

Quant à la transformée de Fourier-Laplace de $\mu \in \mathcal{M}\left(\mathrm{Sp}^b G\right)$ (définition 2.6.5) elle est donnée par

$$\mathcal{FL}\mu\left(s\right) = \int \chi\left(s\right) \, d\mu\left(\chi\right) = \int \overline{\mathcal{G}s} \, d\mu \ .$$

Nous aurons aussi besoin de l'espace vectoriel $\mathcal{M}\left(\mathrm{Sp}^b G \smallsetminus \{1\}\right)$ de toutes les intégrales de Radon sur $\mathrm{Sp}^b G \smallsetminus \{1\}$, muni de la topologie faible

$$\sigma\left(\mathcal{M}\left(\mathrm{Sp}^b G \smallsetminus \{1\}\right), \mathcal{K}\left(\mathrm{Sp}^b G \smallsetminus \{1\}\right)\right)$$

dite *topologie vague* .

THÉORÈME 1

(i) *La transformation de Fourier-Laplace*

$$\mathcal{FL} : \mathcal{M}\left(\mathrm{Sp}^b G\right) \longrightarrow \mathrm{lin}\,\mathcal{TP}^b\left(G\right)$$

est un isomorphisme d'algèbre involutive et

$$\mathcal{FL} : \mathcal{M}_+ \left(\mathrm{Sp}^b G\right) \longrightarrow \mathcal{TP}^b (G)$$

est un homéomorphisme.

(ii) Soit $f : G \longrightarrow \mathbb{K}$. Pour que $f \in \mathcal{RTP}(G)$, il faut et il suffit que $e^{u \cdot f} \in \mathcal{TP}(G)$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$.

(iii) Soit $f \in \mathcal{RTP}(G)$. Pour que $e^{u \cdot f} \in \mathcal{TP}^{eb}(G)$, respectivement $e^{u \cdot f} \in \mathcal{TP}^b(G)$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, il faut et il suffit qu'il existe une valeur absolue $\rho \geqslant 1$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{Re}\, f \leqslant c + \ln \rho \ ,$$

respectivement

$$\mathrm{Re}\, f \leqslant c \ .$$

Dans ce cas la plus petite valeur de c est $f(0)$.

Démonstration de (i) D'après le théorème 2.6.iv $\mathcal{FL}$ est bijective et, pour tout $s \in G$, il vient

$$\mathcal{FL}(\mu * \nu)(s) = \int \chi(s)\ d(\mu * \nu)(\chi) = \int \left(\int (\chi \cdot \theta)(s)\ d\mu(\chi) \right) d\nu(\theta) =$$

$$= \left(\int \chi(s)\ d\mu(\chi) \right) \cdot \left(\int \theta(s)\ d\nu(\theta) \right) = \mathcal{FL}\mu(s) \cdot \mathcal{FL}\nu(s)$$

et

$$\mathcal{FL}\overline{\mu}(s) = \int \chi(s)\ d\overline{\mu}(\chi) = \overline{\int \overline{\chi(s)}\, d\mu(\chi)} \underset{\chi = \chi^*}{=} \overline{\int \chi(s^*)\ d\mu(\chi)} = \overline{\mathcal{FL}\mu(s^*)} = (\mathcal{FL}\mu)^*(s) \ .$$

La transformation de Fourier-Laplace est la topologie de convergence simple sur G correspondant à la topologie faible $\sigma\left(\mathcal{M}\left(\mathrm{Sp}^b G\right), \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_{|\,\mathrm{Sp}^b G}\right)$, qui est évidemment moins fine que $\sigma\left(\mathcal{M}\left(\mathrm{Sp}^b G\right), \mathcal{C}\left(\mathrm{Sp}^b G\right)\right)$. D'autre part si un filtre $\mathfrak{F}$ sur $\mathcal{TP}^b(G)$ converge ponctuellement sur G , $\overset{-1}{\mathcal{FL}}(\mathfrak{F})$ est un filtre de Cauchy sur $\mathcal{M}_+\left(\mathrm{Sp}^b G\right)$ pour la topologie de la convergence ponctuelle sur $\mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_{|\,\mathrm{Sp}^b G} \ni 1$. Il existe donc une partie $A \in \overset{-1}{\mathcal{FL}}(f)$ telle que $\sup \langle 1 |\, A \rangle < \infty$. Ainsi A est contenue la partie compacte des intégrales de Radon positives de masse $\leqslant \sup \langle 1 |\, A \rangle$. Tout ultrafiltre $\mathfrak{U}$ sur A est donc convergent et s'il est plus fin que $\overset{-1}{\mathcal{FL}}(\mathfrak{F})$, $\mathcal{FL}(\mathfrak{U})$ est plus fin que $\mathfrak{F}$, donc

$$\mathcal{FL}(\lim \mathfrak{U}) = \lim \mathcal{FL}(\mathfrak{U}) = \lim \mathfrak{F} \ .$$

Puisque $\mathcal{FL}$ est bijective, on obtient $\lim \mathfrak{U} = \overset{-1}{\mathcal{FL}}(\lim \mathfrak{F})$, ce qui finit de prouver que $\overset{-1}{\mathcal{FL}}(\mathfrak{F})$ converge vers $\overset{-1}{\mathcal{FL}}(\lim \mathfrak{F})$.

Démonstration de (ii) C'est une reformulation du théorème 2.5 dans le cadre d'un monoïde involutif.

Démonstration de (iii) Les conditions sont nécessaires car si ρ est une valeur absolue telle que $e^{\mathrm{Re}\, f} = \left|e^f\right| \leqslant e^{f(0)} \cdot \rho$, nous pouvons admettre que $\rho \geqslant 1$, respectivement que $\rho = 1$ dans le cas borné, et il vient

$$\mathrm{Re}\, f \leqslant f(0) + \ln \rho \quad \text{, respectivement} \quad \mathrm{Re}\, f \leqslant f(0) \ .$$

Rappelons, puisque f est hermitienne, que $f(0) \in \mathbb{R}$. Réciproquement, pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient

$$\left|e^{u \cdot f}\right| = e^{u \cdot \operatorname{Re} f} \leqslant e^{u \cdot f(0)} \cdot \rho^u$$

et ρ^u est une valeur absolue, donc $e^{u \cdot f} \in \mathcal{TP}^{eb}(G)$. □

DÉFINITION 1 Nous désignerons par $\mathcal{RTP}^m(G)$ l'ensemble des $f \in \mathcal{RTP}(G)$ telles que $\operatorname{Re} f$ soit majorée, donc telles que $e^{\mathbb{R}_+^* \cdot f} \subset \mathcal{TP}^b(G)$.

On dit que $(\mu_u)_{u \in \mathbb{R}_+} \subset \mathcal{M}_+\left(\operatorname{Sp}^b G\right)$ est un *semi-groupe de convolution* si

(a) $\mu_0 = \varepsilon_1$, intégrale de Dirac concentrée sur le caractère 1 .

(b) Pour tout $u, v \in \mathbb{R}_+$, on a $\mu_u * \mu_v = \mu_{u+v}$.

(c) L'application $u \longmapsto \mu_u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{M}_+\left(\operatorname{Sp}^b G\right)$ est faiblement continue.

Nous aurons en outre besoin de la notation suivante : soit

$$T_s := \frac{1}{2} \cdot (\tau_s + \tau_{s^*}) : \mathbb{K}^G \longrightarrow \mathbb{K}^G ,$$

i.e. pour tout $f \in \mathbb{K}^G$ et $s \in G$,

$$T_s f := \frac{1}{2} \cdot (\tau_s f + \tau_{s^*} f) : t \longmapsto \frac{1}{2} \cdot \left[f(t+s) + f(t+s^*)\right] : G \longrightarrow \mathbb{K} .$$

Finalement nous dirons que $\mu \in \mathcal{M}_+\left(\operatorname{Sp}^b G \smallsetminus \{1\}\right)$ est une *intégrale de Lévy* si

$$\int_{\operatorname{Sp}^b G \smallsetminus \{1\}} (1 - \operatorname{Re} \mathcal{G}s)\, d\mu < \infty \quad \text{pour tout } s \in G .$$

REMARQUE 1 Une intégrale de Lévy n'est pas nécessairement bornée au voisinage de 1 .

Par exemple si $G = \mathbb{R}_+$, on a $\operatorname{Sp}^b \mathbb{R}_+ = \mathcal{EXP}^b(\mathbb{R}_+) \cong [0,1]$ (proposition 2.1.2), donc $\operatorname{Sp}^b \mathbb{R}_+ \smallsetminus (1) = [0,1[$ et, pour $s \in \mathbb{R}_+$, la transformée de Gelfand de $1_{\{s\}}$ est

$$\mathcal{G}s : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : r \longmapsto r^s .$$

Les intégrales de Radon sur $[0,1[$ de la forme $\frac{1}{(1-\mathrm{id})^\gamma} \cdot \lambda_{[0,1[}$ pour $\gamma \in \,]0,1]$ sont non-bornées, mais des intégrales de Lévy, puisque

$$0 \leqslant 1 - \mathcal{G}s = 1 - \mathrm{id}^s \leqslant 1 .$$

LEMME

(i) Pour tout $\sigma \in \mathcal{M}_+\left(\operatorname{Sp}^b G\right)$ et $s \in G$, on a

$$(\mathrm{Id} - T_s)\, \mathcal{FL}\sigma = \mathcal{FL}\Big((1 - \operatorname{Re}\mathcal{G}s) \cdot \sigma\Big) \in \mathcal{TP}^b(G) .$$

(ii) Si $f \in \mathbb{K}^G$ est telle que $(\mathrm{Id} - T_s)\, f \in \mathcal{TP}^b(G)$ pour tout $s \in G$, posons

$$\sigma_s := \overset{-1}{\mathcal{FL}}\Big((\mathrm{Id} - T_s)\, f\Big) \qquad , \textit{i.e.} \qquad (\mathrm{Id} - T_s)\, f = \mathcal{FL}\sigma_s .$$

Alors il existe une unique intégrale de Lévy μ *sur* $\operatorname{Sp}^b \smallsetminus \{1\}$, *dite* associée *à* f , *telle que*

$$(1 - \operatorname{Re}\mathcal{G}s) \cdot \mu = \sigma_{s|\operatorname{Sp}^b G \smallsetminus \{1\}} \quad \textit{pour tout } s \in G .$$

Démonstration de (i) En effet

$$(\mathrm{Id} - T_s)\, \mathcal{FL}\sigma = (\mathrm{Id} - T_s) \left(\int \chi \, d\sigma(\chi) \right) =$$

$$= \int (\mathrm{Id} - T_s)\, \chi \, d\sigma(\chi) = \int \left[\chi - \frac{1}{2} \cdot \left(\chi \cdot \chi(s) + \chi \cdot \chi(s^*) \right) \right] d\sigma(\chi) =$$

$$= \int \chi \cdot (1 - \mathrm{Re}\, \mathcal{G}s) \; d\sigma(\chi) = \mathcal{FL}\left((1 - \mathrm{Re}\, \mathcal{G}s) \cdot \sigma \right) \in \mathcal{TP}^b(G) \ ,$$

puisque d'une part $\frac{1}{2} \cdot [\chi(s) + \chi(s^*)] = \frac{1}{2} \cdot \left[\overline{\mathcal{G}s} + \mathcal{G}s \right](\chi) = \mathrm{Re}\, \mathcal{G}s(\chi)$ et, d'autre part $\mathrm{Re}\, \chi \leqslant |\chi| \leqslant 1$ pour $\chi \in \mathrm{Sp}^b G$ par la remarque 2.1.3, montrant que $1 - \mathrm{Re}\, \mathcal{G}s \geqslant 0$.

Démonstration de (ii) Pour la seconde partie, pour tout $s, t \in G$, il vient tout d'abord

$$(1 - \mathrm{Re}\, \mathcal{G}t) \cdot \sigma_s = (1 - \mathrm{Re}\, \mathcal{G}t) \cdot \overset{-1}{\mathcal{FL}} \left((\mathrm{Id} - T_s)\, f \right) = \overset{-1}{\mathcal{FL}} \left((\mathrm{Id} - T_t)(\mathrm{Id} - T_s)\, f \right) =$$

$$= \overset{-1}{\mathcal{FL}} \left((\mathrm{Id} - T_s)(\mathrm{Id} - T_t)\, f \right) = (1 - \mathrm{Re}\, \mathcal{G}s) \cdot \overset{-1}{\mathcal{FL}} \left((\mathrm{Id} - T_t)\, f \right) = (1 - \mathrm{Re}\, \mathcal{G}s) \cdot \sigma_t \ ,$$

montrant que sur l'ouvert $\{\mathrm{Re}\, \mathcal{G}s < 1\} \cap \{\mathrm{Re}\, \mathcal{G}t < 1\}$ de $\mathrm{Sp}^b G \smallsetminus \{1\}$, les intégrales

$$(1 - \mathrm{Re}\, \mathcal{G}s)^{-1} \cdot \sigma_s \qquad \text{et} \qquad (1 - \mathrm{Re}\, \mathcal{G}t)^{-1} \cdot \sigma_t$$

coïncident. Comme $(\{\mathrm{Re}\, \mathcal{G}s < 1\})_{s \in G \smallsetminus \{0\}}$ est un recouvrement ouvert de l'espace localement compact $\mathrm{Sp}^b G \smallsetminus \{1\}$ et en utilisant une partition de l'unité, il existe une unique intégrale de Radon positive μ sur $\mathrm{Sp}^b G \smallsetminus \{1\}$ égale à $(1 - \mathrm{Re}\, \mathcal{G}s)^{-1} \cdot \sigma_s$ sur $\{\mathrm{Re}\, \mathcal{G}s < 1\}$, d'où le résultat.

□

THÉORÈME 2 *Il y a correspondance biunivoque entre les semi-groupes de convolution*

$$u \longmapsto \mu_u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{M}_+\left(\mathrm{Sp}^b G\right)$$

et les fonctions $f \in \mathcal{RTP}^m(G)$ *par la formule*

$$\mathcal{FL}\mu_u = e^{u \cdot f} \quad \textit{pour tout } u \in \mathbb{R}_+ \ .$$

Dans ce cas, pour tout $s \in G$,

$$\sigma_s := \lim_{u \to 0+} \frac{1}{u} \cdot (1 - \mathrm{Re}\, \mathcal{G}s) \cdot \mu_u \quad \textit{existe dans } \mathcal{M}_+\left(\mathrm{Sp}^b G\right) \ ,$$

$$\mathcal{FL}\sigma_s = (\mathrm{Id} - T_s)\, f \in \mathcal{TP}^b(G)$$

et l'intégrale de Lévy μ *associée à* f *est*

$$\mu = \lim_{u \to 0+} \frac{1}{u} \cdot \mu_{u|\,\mathrm{Sp}^b G \smallsetminus \{1\}} \quad \textit{vaguement dans } \mathcal{M}\left(\mathrm{Sp}^b G \smallsetminus \{1\}\right) \ .$$

Si $(\mu_u)_{u \in \mathbb{R}_+}$ est un semi-groupe de convolution, pour tout $s \in G$, la fonction

$$u \longmapsto \mathcal{FL}\mu_u(s) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{K}$$

est continue, puisque $\mathcal{FL}$ est continue, et c'est un caractère de $\mathbb{R}_+$ car

$$\mathcal{FL}\mu_{u+v}(s) = \mathcal{FL}(\mu_u * \mu_v)(s) = \mathcal{FL}\mu_u(s) \cdot \mathcal{FL}\mu_v(s) \ .$$

Ainsi $\mathcal{FL}\mu_u(s) = e^{f(s) \cdot u}$ pour un certain $f(s) \in \mathbb{K}$ (proposition 2.1.2) et $e^{u \cdot f} = \mathcal{FL}\mu_u \in \mathcal{TP}^b(G)$, donc $f \in \mathcal{RTP}^m(G)$. Réciproquement si $f \in \mathcal{RTP}^m(G)$, il suffit de poser $\mu_u :=$

$\overset{-1}{\mathcal{FL}}\left(e^{u\cdot f}\right)$, d'où le résultat par le théorème 1.i, puisque $u \longmapsto e^{u\cdot f}$ est un semi-groupe de multiplication !

Si $f \in \mathcal{RTP}^m(G)$, il vient

$$(\mathrm{Id} - T_s)\left(e^{u\cdot f} - 1\right) = e^{u\cdot f} - 1 - T_s e^{u\cdot f} + 1 = (\mathrm{Id} - T_s)\, e^{u\cdot f} =$$

$$= (\mathrm{Id} - T_s)\,\mathcal{FL}\mu_u = \mathcal{FL}\left((1 - \mathrm{Re}\,\mathcal{G}s)\cdot\mu_u\right) \in \mathcal{TP}^b(G)$$

par le lemme. Comme $\lim_{u\to 0+}\frac{e^{u\cdot f}-1}{u} = f$, la continuité de $\overset{-1}{\mathcal{FL}}$ sur $\mathcal{TP}^b(G)$ montre finalement que

$$\sigma_s := \lim_{u\to 0+}\frac{1}{u}\cdot(1 - \mathrm{Re}\,\mathcal{G}s)\cdot\mu_u = \overset{-1}{\mathcal{FL}}\left((\mathrm{Id} - T_s)\lim_{u\to 0+}\frac{e^{u\cdot f}-1}{u}\right) = \overset{-1}{\mathcal{FL}}\left((\mathrm{Id} - T_s)\, f\right)$$

existe dans $\mathcal{M}_+\left(\mathrm{Sp}^b\, G\right)$ et que $(\mathrm{Id} - T_s)\, f = \mathcal{FL}\sigma_s$.

Pour tout $\zeta \in \mathcal{K}(\{\mathrm{Re}\,\mathcal{G}s < 1\})$, la fonction $\zeta\cdot(1 - \mathrm{Re}\,\mathcal{G}s)^{-1} \in \mathcal{C}\left(\mathrm{Sp}^b\, G\right)$ et

$$\lim_{u\to 0+}\frac{1}{u}\cdot\int \zeta\, d\mu_u = \lim_{u\to 0+}\frac{1}{u}\cdot\int \zeta\cdot(1 - \mathrm{Re}\,\mathcal{G}s)^{-1}\cdot(1 - \mathrm{Re}\,\mathcal{G}s)\; d\mu_u =$$

$$= \int \zeta\cdot(1 - \mathrm{Re}\,\mathcal{G}s)^{-1}\; d\sigma_s = \int \zeta\cdot(1 - \mathrm{Re}\,\mathcal{G}s)^{-1}\cdot(1 - \mathrm{Re}\,\mathcal{G}s)\; d\mu = \int \zeta\, d\mu\ ,$$

ce qui prouve notre assertion en utilisant une partition surbordonnée au recouvrement ouvert $(\{\mathrm{Re}\,\mathcal{G}s < 1\})_{s\in G\smallsetminus\{0\}}$ de $\mathrm{Sp}^b\, G \smallsetminus \{1\}$. □

REMARQUE 2 Si $\int_{\mathrm{Sp}^b\, G\smallsetminus\{1\}} |\chi(s) - 1|\; d\mu(\chi) < \infty$ pour tout $s \in G$, alors

$$\int_{\mathrm{Sp}^b\, G\smallsetminus\{1\}} (\chi - 1)\; d\mu(\chi) \in \mathcal{RTP}^m(G)\ ,$$

mais cette condition n'est pas satisfaite par toute intégrale de Lévy. On lève cette difficulté en introduisant un facteur de correction L introduit par K.R. Parthasarathy, R.R. Rao et S.R.S. Varadhan [ParRaoVar 1963] si G est un groupe (commutatif) muni de l'involution $-\,\mathrm{id}_G$. Cette notion à été généralisée par Berg, Christensen et Ressel [BeChRe 1984], definition 3.17, p. 108, mais l'existence pour un monoïde involutif quelconque est due à H. Buchwalter [Buc 1986].

THÉORÈME 3 (Buchwalter) *Il existe une fonction $L : G\times\mathrm{Sp}^b\, G \longrightarrow \mathbb{K}$, on dit que c'est une* fonction de Lévy *pour G , telle que*

(i) Pour tout $\chi \in \mathrm{Sp}^b\, G$, la fonction $L(\cdot,\chi)$ est un homomorphisme hermitien sur G tel que $L(s^*,\chi) = -L(s,\chi)$ pour tout $s \in G$.

(ii) Pour tout $s \in G$, la fonction $L(s,\cdot)$ est continue sur $\mathrm{Sp}^b\, G$ et $L(s,\overline{\chi}) = -L(s,\chi)$ pour tout $\chi \in \mathrm{Sp}^b\, G$.

(iii) Pour toute intégrale de Lévy μ et $s \in G$, on a

$$\int_{\mathrm{Sp}^b\, G\smallsetminus\{1\}} |\chi(s) - 1 - L(s,\chi)|\; d\mu(\chi) < \infty\ ,$$

$$f_\mu := \int_{\mathrm{Sp}^b\, G\smallsetminus\{1\}} \left(\chi - 1 - L(\cdot,\chi)\right)\; d\mu(\chi) \in \mathcal{RTP}^m(G)\ ,$$

$$(\mathrm{Id} - T_t)\, f_\mu = \mathcal{FL}\left(1_{\mathrm{Sp}^b G \smallsetminus \{1\}} \cdot \sigma_s\right) \ ,$$

l'intégrale de Lévy associée à f_μ *est* μ *et* $\mathrm{Re}\, f_\mu \leqslant 0$.

(iv) *Pour tout* $\varphi \in \mathbb{K}^{(G)}$ *tel que* $\langle \varphi | \, 1 \rangle = 0$ *et* $\mathcal{G}\varphi \in \mathcal{G}\left(\mathbb{K}^{(G)}\right)_+$ *, on a*

$$\langle \varphi | \, L(\cdot, \chi) \rangle = 0 \quad \textit{pour tout } \chi \in \mathrm{Sp}^b G \ .$$

La construction commence par l'introduction de la relation d'équivalence sRt définie par

$$\text{il existe } u \in G \text{ tel que } u = u^* \text{ et } s + t^* + u = s^* + t + u \ .$$

On vérifie facilement que cette relation est compatible avec l'addition et l'involution, ce qui permet sur G/R de définir

$$Rs + Rt := R(s+t) \qquad \text{et} \qquad (Rs)^* := R(s^*) \ .$$

Mais $Rs + (Rs)^* = R(s + s^*) = R0 = 0$ montrant que Rs est inversible et que l'élément opposé est $-Rs = (Rs)^*$, donc que G/R est un groupe. Soit alors F le sous-groupe de G/R formé des éléments d'ordre fini et considérons le groupe $\widetilde{G} := (G/R)/F$ comme un $\mathbb{Z}$-module. Puisque $\widetilde{G}$ est sans torsion, l'application canonique $v \longmapsto 1 \otimes v : \widetilde{G} \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes \widetilde{G}$ est injective (cf. Bourbaki [Bou 1970], A II, §7, no. 10, corollaire 1, p. 117) et, puisque $\mathbb{Q} \otimes \widetilde{G}$ est un espace vectoriel, il existe une famille $(s_j)_{j\in J} \subset G$ telle que $(1 \otimes \widetilde{s_j})_{j\in J}$ soit une base de $\mathbb{Q} \otimes \widetilde{G}$. Pour tout $s \in G$, il existe alors une unique famille $\left(\frac{n_j}{n}\right)_{j\in J} \in \mathbb{Q}^{(J)}$ telle que

$$1 \otimes \widetilde{s} = \sum_{j\in J} \frac{n_j}{n} \otimes \widetilde{s_j} \quad \text{dans } \mathbb{Q} \otimes \widetilde{G} \ ,$$

i.e.

$$n \cdot \widetilde{s} = \sum_{j\in J} n_j \cdot \widetilde{s_j} \quad \text{dans } \widetilde{G} \ ,$$

et il suffit de poser

$$L(s, \chi) := \sum_{j\in J} \frac{n_j}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\chi(s_j) - \chi\left(s_j^*\right)\right] = \sum_{j\in J} \frac{n_j}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\chi(s_j) - \overline{\chi(s_j)}\right] \ .$$

Démonstration de (i) Si $\left(\frac{n_j}{n}\right)_{j\in J}$, $\left(\frac{m_j}{m}\right)_{j\in J} \in \mathbb{Q}^{(J)}$ sont respectivement associés à $s, t \in G$, alors $\left(\frac{m\cdot n_j + n\cdot m_j}{n\cdot m}\right)_{j\in J}$ est associé à $s + t$, donc

$$L(s+t, \chi) := \frac{1}{2} \cdot \sum_{j\in J} \frac{m \cdot n_j + n \cdot m_j}{n \cdot m} \cdot \left[\chi(s_j) - \overline{\chi(s_j)}\right] = L(s, \chi) + L(t, \chi) \ .$$

Puisque $\left(-\frac{n_j}{n}\right)_{j\in J}$ est associé à s^* , on a également $L(s^*, \chi) = -L(s, \chi)$.

Démonstration de (ii) On a $L(s, \cdot) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j\in J} \frac{n_j}{n} \cdot \left[\overline{\mathcal{G}s_j} - \mathcal{G}s_j\right] \in \mathcal{C}\left(\mathrm{Sp}^b G\right)$ et

$$L(s, \overline{\chi}) = \sum_{j\in J} \frac{n_j}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\overline{\chi(s_j)} - \chi(s_j)\right] = -L(s, \chi) \ .$$

Démonstration de (iii) Prouvons tout d'abord que la fonction

$$\overline{\mathcal{G}s} - 1 - \sum_{j\in J} \frac{n_j}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\overline{\mathcal{G}s_j} - \mathcal{G}s_j\right] : \chi \longmapsto \chi(s) - 1 - L(s, \chi)$$

est μ-intégrable. Le cas où l'involution est l'identité, donc $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, est trivial : d'une part tous les éléments de G sont équivalents, donc $G/\!\equiv\, = \{0\}$ et 0 est la fonction de Lévy construite, et d'autre part $\overline{\mathcal{G}s} - 1 = \operatorname{Re}\mathcal{G}s - 1$ est μ-intégrable par définition d'une intégrale de Lévy.

Soit donc $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Cette fonction appartient à $\mathcal{C}\left(\mathrm{Sp}^b\, G\right)$, donc est bornée sur $\mathrm{Sp}^b\, G \smallsetminus \{1\}$; il nous suffit donc de montrer qu'il existe un voisinage V de 1 tel que

$$\operatorname{Im}\mathcal{G}s - \sum_{j\in J} \frac{n_j}{n} \cdot \operatorname{Im}\mathcal{G}s_j \in \mathbf{L}^1\left(1_{V\smallsetminus\{1\}} \cdot \mu\right) \ .$$

Mais la fonction arg étant choisie à valeurs dans $]-\pi, \pi]$, pour tout $z \in \mathbb{B} \smallsetminus \{0\}$, on a

$$\frac{\operatorname{Im} z}{\arg z} \geqslant \frac{\operatorname{Im} z}{\tan \arg z} = \frac{\operatorname{Re} z}{1} \ ,$$

donc

$$|\arg z - \operatorname{Im} z| = |\arg z| \cdot \left|1 - \frac{\operatorname{Im} z}{\arg z}\right| \leqslant |\arg z| \cdot |1 - \operatorname{Re} z| \leqslant \pi \cdot |1 - \operatorname{Re} z| \ .$$

La condition d'intégrabilité est donc équivalente à

$$\arg\mathcal{G}s - \sum_{j\in J} \frac{n_j}{n} \cdot \arg\mathcal{G}s_j \in \mathbf{L}^1\left(1_{V\smallsetminus\{1\}} \cdot \mu\right) \ .$$

Mais comme $n \cdot \widetilde{s} = \sum_{j\in J} n_j \cdot \widetilde{s_j}$, en posant $u := n \cdot s$ et

$$v := \sum_{j\in J, n_j>0} n_j \cdot s_j + \sum_{j\in J, n_j<0} |n_j| \cdot s_j^* \ ,$$

il vient

$$\widetilde{u} = n \cdot \widetilde{s} = \sum_{j\in J} n_j \cdot \widetilde{s_j} = \sum_{j\in J} n_j \cdot \widetilde{s_j} \underset{\widetilde{s^*} = -\widetilde{s}}{=} \sum_{j\in J, n_j>0} n_j \cdot \widetilde{s_j} + \sum_{j\in J, n_j<0} |n_j| \cdot \widetilde{s_j^*} = \widetilde{v} \ ,$$

i.e. $\widetilde{u - v} = 0$, ce qui montre que $R(u - v) \in F$ est d'ordre fini. Il existe ainsi un $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \cdot Ru = p \cdot Rv$ dans G/R , c'est-à-dire $p \cdot u \equiv p \cdot v$ ou bien

$$p \cdot u + p \cdot v^* + w = p \cdot u^* + p \cdot v + w$$

pour un certain $w \in G$. Sur $\{\mathcal{G}w \neq 0\}$ on a

$$\left(\mathcal{G}u \cdot \overline{\mathcal{G}v}\right)^p = \left(\overline{\mathcal{G}u} \cdot \mathcal{G}v\right)^p = \overline{\left(\mathcal{G}u \cdot \overline{\mathcal{G}v}\right)^p} \ ,$$

donc $\left(\mathcal{G}u \cdot \overline{\mathcal{G}v}\right)^p \in \mathbb{R}$ et par suite

$$p \cdot \arg\mathcal{G}u \equiv p \cdot \arg\mathcal{G}v \mod 2\pi \quad \text{ou bien} \quad \arg\mathcal{G}u \equiv \arg\mathcal{G}v \mod \frac{2\pi}{p} \ .$$

La fonction $\arg(\mathcal{G}u - \mathcal{G}v)$ ne peut donc prendre qu'un nombre fini de valeurs. En choisissant un voisinage V de 1 suffisamment petit, nous pouvons supposer qu'il est contenu dans $\{\mathcal{G}w \neq 0\}$ et que l'on ait $\arg\mathcal{G}u = \arg\mathcal{G}v$ et

$$n \cdot |\arg\mathcal{G}s| + \sum_{j\in J} |n_j| \cdot |\arg\mathcal{G}s_j| < \pi \quad \text{sur } V \ .$$

On en déduit que

$$n \cdot \arg\mathcal{G}s = \arg\mathcal{G}u = \arg\mathcal{G}v = \sum_{j\in J} n_j \cdot \arg\mathcal{G}s_j$$

et la condition d'intégrabilité est trivialement satisfaite !

La fonction f_μ est relativement de type positif puisqu'il en est de même de $\chi - 1 - L(\cdot, \chi)$ en remarquant que χ est un caractère, donc de type positif (lemme 2.6.1.ii), et en tenant compte des exemples 2.9, 1 et 2. Pour tout $t \in G$, on a

$$(\mathrm{Id} - T_t) f_\mu = \int_{\mathrm{Sp}^b G \setminus \{1\}} (\mathrm{Id} - T_t) \big(\chi - 1 - L(\cdot, \chi)\big)\, d\mu(\chi) =$$

$$= \int_{\mathrm{Sp}^b G \setminus \{1\}} \chi \cdot \big(1 - \mathrm{Re}\, \mathcal{G}t(\chi)\big)\, d\mu(\chi) \underset{\text{lemme (ii)}}{=} \int_{\mathrm{Sp}^b G \setminus \{1\}} \chi\, d\sigma_s(\chi) = \mathcal{FL}\left(1_{\mathrm{Sp}^b G \setminus \{1\}} \cdot \sigma_s\right) ,$$

car

$$(\mathrm{Id} - T_t) \big(\chi - 1 - L(\cdot, \chi)\big) =$$

$$= \chi - 1 + L(\cdot, \chi)$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \big(\chi(t) + \chi(t^*)\big) \cdot \chi + 1 + \frac{1}{2} \cdot \big[L(\cdot, \chi) + L(t, \chi) + L(\cdot, \chi) + L(t^*, \chi)\big] =$$

$$= \chi \cdot \big(1 - \mathrm{Re}\, \chi(t)\big) = \chi \cdot (1 - \mathrm{Re}\, \mathcal{G}t(\chi)) .$$

Le lemme (ii) montre alors que l'intégrale de Lévy $\widetilde{\mu}$ associée à $\int_{\mathrm{Sp}^b G \setminus \{1\}} (\chi - 1 - L(\cdot, \chi))\, d\mu(\chi)$ satisfait à

$$(1 - \mathrm{Re}\, \mathcal{G}t) \cdot \widetilde{\mu} = \left(1_{\mathrm{Sp}^b G \setminus \{1\}} \cdot \sigma_s\right)_{|\, \mathrm{Sp}^b G \setminus \{1\}} = \sigma_{s|\, \mathrm{Sp}^b G \setminus \{1\}} ,$$

donc est égale à μ par l'unicité. Finalement

$$\mathrm{Re}\, f_\mu = \int_{\mathrm{Sp}^b G \setminus \{1\}} \mathrm{Re}\big(\chi - 1 - L(\cdot, \chi)\big)\, d\mu(\chi) = \int_{\mathrm{Sp}^b G \setminus \{1\}} (\mathrm{Re}\, \chi - 1)\, d\mu(\chi) \leqslant 0 ,$$

puisque $\mathrm{Re}\, L(\cdot, \chi) = 0$.

Démonstration de (iv) N'ayant pas à utiliser cette propriété nous renvoyons le lecteur à l'article de Buchwalter [Buc 1986], dont nous avons évidemment tiré l'essentiel. □

REMARQUE 3 Si G possède un élément *absorbant* , i.e. un $\omega \in G$ tel que $s + \omega = \omega$ pour tout $s \in G$, alors tous les éléments de G sont équivalents, donc $G/\!\equiv\, = \{0\}$ et 0 est la fonction de Lévy construite, car

$$\omega^* = (\omega^* + \omega)^* = \omega + \omega^* = \omega .$$

COROLLAIRE (Formule de Lévy-Khinchin) *Soient L une fonction de Lévy pour G et $f : G \longrightarrow \mathbb{K}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $f \in \mathcal{RTP}^m(G)$.

(ii) *f est une fonction hermitienne telle que* $(\mathrm{Id} - T_s) f \in \mathcal{TP}^b(G)$ *pour tout* $s \in G$.

(iii) *Il existe un homomorphisme hermitien ℓ tel que $\ell = -\overline{\ell}$, une forme quadratique négative q et une intégrale de Lévy μ tels que*

$$f = f(0) + \ell + q + \int_{\mathrm{Sp}^b G \setminus \{1\}} (\chi - 1 - L(\cdot, \chi))\, d\mu(\chi) \quad \textit{dans } \mathbb{K}^G .$$

Le triple (l, q, μ) *est univoquement déterminé :* μ *est l'intégrale de Lévy associée à* f *et*

$$q(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Re} f(n\cdot s)}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{f\big(n\cdot(s+s^*)\big)}{2n} \ .$$

(i) ⇒ (ii) Cela a été démontré dans le théorème 2.

(ii) ⇒ (iii) Si μ désigne l'intégrale de Lévy associée à f dans le lemme (ii), grâce au théorème 3.iii on peut considérer la fonction

$$f_\mu := \int_{\mathrm{Sp}^b G \smallsetminus \{1\}} \big(\chi - 1 - L(\cdot,\chi)\big)\, d\mu(\chi) \ ,$$

puis

$$g := f - f(0) - f_\mu \ .$$

Elle est hermitienne, puisque f et f_μ le sont,

$$g(0) = -f_\mu(0) = -\int_{\mathrm{Sp}^b G \smallsetminus \{1\}} \big(\chi(0) - 1 - L(0,\chi)\big)\, d\mu(\chi) = 0$$

et

$$(\mathrm{Id} - T_t)\, g = (\mathrm{Id} - T_t)\, f - (\mathrm{Id} - T_t)\, f_\mu \underset{\text{lemme (ii) et théorème 3}}{=} \mathcal{FL}\sigma_t - \mathcal{FL}\left(1_{\mathrm{Sp}^b G \smallsetminus \{1\}} \cdot \sigma_t\right) =$$

$$= \mathcal{FL}\big(1_{\{1\}} \cdot \sigma_t\big) = \mathcal{FL}\big(\sigma_t(\{1\}) \cdot \varepsilon_1\big) = \sigma_t(\{1\}) \geqslant 0 \, ;$$

mais cela signifie que, pour tout $s, t \in G$, on a

$$0 \leqslant (\mathrm{Id} - T_t)\, g(s) = g(s) - \frac{1}{2} \cdot \Big[g(s+t) + g(s+t^*)\Big] =$$

$$\underset{s=0}{=} -\frac{1}{2} \cdot \Big[g(t) + g(t^*)\Big] = -\operatorname{Re} g(t) \ .$$

En particulier $q := \operatorname{Re} g \leqslant 0$ satisfait à

$$q(s+t) + q(s+t^*) = 2 \cdot \big(q(s) + q(t)\big) \ ;$$

c'est donc une fonction quadratique négative. D'autre part $\ell := \frac{1}{2}\cdot(g - \overline{g})$ est hermitien, satisfait à $\overline{\ell} = -\ell$, ainsi qu'à

$$2 \cdot \ell(s) = \ell(s+t) + \ell(s+t^*)$$

et

$$2 \cdot \ell(t) = \ell(t+s) + \ell(t+s^*) = \ell(s+t) - \ell(s+t^*) \ ,$$

et par suite à

$$\ell(s) + \ell(t) = \ell(s+t) \ ;$$

c'est donc un homomorphisme hermitien tel que $\overline{\ell} = -\ell$.

(iii) ⇒ (i) Grâce aux exemples 2.9, 1 et 2, la proposition 2.9.vii et le théorème 2.10.3.iii, on a $f \in \mathcal{RTP}^m(G)$. Comme μ est la mesure de Lévy associée à f , elle est univoquement déterminée, ainsi que g , donc aussi q et ℓ .

Quant à la dernière formule on a

$$\frac{\operatorname{Re} f(n\cdot s)}{n^2} = \frac{f(0)}{n^2} + \frac{q(n\cdot s)}{n^2} + \int_{\mathrm{Sp}^b G \smallsetminus \{1\}} \frac{1}{n^2} \cdot \big(\operatorname{Re} \mathcal{G}(n\cdot s) - 1\big)\, d\mu \ ,$$

puisque $\operatorname{Re}\ell = 0$ et $\operatorname{Re}\chi(n\cdot s) = \operatorname{Re}\mathcal{G}(n\cdot s)$, et

$$\frac{f\left(n\cdot(s+s^*)\right)}{2n} = \frac{f(0)}{2n} + \frac{q\left(n\cdot(s+s^*)\right)}{2n} + \frac{1}{2}\cdot\int_{\mathrm{Sp}^b G\smallsetminus\{1\}} \frac{1}{n}\cdot\Big(\mathcal{G}(n\cdot[s+s^*]) - 1\Big)\,d\mu$$

puisque $\ell(s+s^*) = \ell(s) - \ell(s) = 0$, $\chi\left(n\cdot[s+s^*]\right) = \mathcal{G}(n\cdot[s+s^*])$ et $L(s+s^*,\chi) = 0$. Mais par la proposition 2.9, (iii) et (ii), on a

$$\lim_n \frac{q(n\cdot s)}{n^2} = q(s) - \frac{1}{2}\cdot q(s+s^*) \quad \text{et} \quad q\left(n\cdot(s+s^*)\right) = n\cdot q(s+s^*) \ ,$$

donc

$$\lim_n \frac{q(n\cdot s)}{n^2} + \lim_n \frac{q\left(n\cdot(s+s^*)\right)}{2n} = q(s) - \frac{1}{2}\cdot q(s+s^*) + \frac{1}{2}\cdot q(s+s^*) = q(s) \ .$$

Il nous reste à prouver que les intégrales tendent vers 0 . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{B}$ et $\varphi := \arg z \in \left]-\pi,\pi\right]$, on a tout d'abord

$$1 - |z|^n = \left(\sum_{j\in n} |z|^j\right)\cdot(1-|z|) \leqslant n\cdot(1-|z|) \quad \text{si } |z| \leqslant 1 \ ,$$

$$1-\cos(n\varphi) = 2\sin^2\frac{n\varphi}{2} = 2n^2\cdot\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\frac{n\varphi}{2}}\right)^2\cdot\left(\frac{\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant n^2\cdot(1-\cos\varphi)\cdot\frac{\pi^2}{4} \ ,$$

car $\left|\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\frac{n\varphi}{2}}\right| \leqslant 1$ et $\left|\frac{\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}$, ainsi que

$$\frac{1}{n}\cdot(1-|z|) + \frac{\pi^2}{4}\cdot|z|^n\cdot(1-\cos\varphi) \leqslant \frac{\pi^2}{4}\cdot(1-|z|\cdot\cos\varphi) \ ,$$

car

$$\frac{\pi^2}{4}\cdot\Big[1-|z|^n - |z|\cdot\cos\varphi\cdot\left(1-|z|^{n-1}\right)\Big] - \frac{1}{n}\cdot(1-|z|) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\pi^2}{4}\cdot\Big[1-|z|^n - |z|\cdot\left(1-|z|^{n-1}\right)\Big] - \frac{1}{n}\cdot(1-|z|) = \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{n}\right)\cdot(1-|z|) \geqslant 0 \ .$$

Puisque $|\mathcal{G}s| \leqslant 1$, on obtient

$$\frac{1}{n}\cdot\Big(1-\mathcal{G}(n\cdot[s+s^*])\Big) = \frac{1}{n}\cdot\left(1-|\mathcal{G}s|^{2n}\right) \leqslant 1-|\mathcal{G}s|^2 = 1-\mathcal{G}(s+s^*) \in \mathbf{L}^1(\mu) \ .$$

et

$$\frac{1}{n^2}\cdot\Big(1-\operatorname{Re}\mathcal{G}(n\cdot s)\Big) = \frac{1}{n^2}\cdot\left(1-\operatorname{Re}(\mathcal{G}s)^n\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot\Big[1-|\mathcal{G}s|^n + |\mathcal{G}s|^n\cdot(1-\cos(n\cdot\arg\mathcal{G}s))\Big] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\cdot(1-|\mathcal{G}s|) + \frac{\pi^2}{4}\cdot|\mathcal{G}s|^n\cdot(1-\cos\arg\mathcal{G}s) \leqslant \frac{\pi^2}{4}\cdot(1-\operatorname{Re}\mathcal{G}s) \in \mathbf{L}^1(\mu) \ ,$$

ce qui nous permet d'appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue. — □

REMARQUE 4 Attention, q et ℓ sont bien univoquement déterminés, mais dépendent du choix de L , donc de la famille $(s_j)_{j\in J} \subset G$ tel que $(1\otimes\widetilde{s_j})_{j\in J}$ soit une base de $\mathbb{Q}\otimes\widetilde{G}$.