Analysis I

Prof. Dr. S. Dahlke, Dipl.-Math. T. Raasch

Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik und Informatik

1 Grundlagen, Mengen und Abbildungen

Eine Menge besteht aus Elementen
Hier: „mathematische Gegenstände“ (Zahlen, Punkte usw.)

Schreibweisen
$a \in M$ für: a ist Element von M
$a \notin M$ für: a ist nicht Element von M
$M = N$ bedeutet: $a \in M \iff a \in N$
endliche Mengen $M = \{2, 3, 5, 7, 11\}$
$(3 \in M\,,\ 4 \notin M)$
unendliche Mengen benötigen <u>definierende Eigenschaft</u>,
$M = \{x \text{ reell} \,|\, x < 0\}$

Beispiele 1.1

i) $M_1 = \{x \,|\, 0 \leq x \leq 1\}$

ii) $M_2 = \{x \,|\, x^2 < 2\}$

iii) $M_3 = \{x \text{ ist Primzahl}\}$

iv) $M_4 = \{x \,|\, x + 1 = 0\}$

v) $M_5 = \{x \,|\, x^2 < 0\}$

Def. 1.2

i) Die <u>leere Menge $\emptyset$</u> enthält keine Elemente.

ii) M heißt <u>Teilmenge</u> von $N, M \subset N$, falls
$a \in M \implies a \in N$.

iii) $M = N$, falls $a \in M \iff a \in N$.

iv) $M \cup N = \{x \,|\, x \in M \text{ oder } x \in N\}$
heißt <u>Vereinigungsmenge</u>.

v) $M \cap N = \{x \,|\, x \in M \text{ und } x \in N\}$
. heißt <u>Durchschnittsmenge</u> von M und N.

vi) $M \backslash N = \{x \,|\, x \in M \text{ und } x \notin N\}$
heißt <u>Differenzmenge</u>. Falls $N \subset M$, so heißt $M \backslash N$ <u>Komplement</u> von N bzgl. M.

Def. 1.3 Seien M, N nichtleer. Eine Funktion (Abbildung) f von M nach N ist eine Vorschrift, die jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ zuordnet. y wird auch mit $f(x)$ bezeichnet und heißt Wert von f an der Stelle x. M heißt Definitionsmenge (bereich), N die Zielmenge.

$$\begin{array}{rccl} f: & M & \longrightarrow & N \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array} \tag{1.1}$$

Beispiel: $M = \{x \,|\, 0 \leq x\}$, $N = \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rccl} f: & M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \tag{1.2}$$

Def. 1.4 Sei f eine Abbildung von M nach N.

i) Die Menge

$W = \{y \,|\, \exists\, x \in M \text{, so dass } y = f(x)\}$ heißt Wertemenge von f.

$W = f(M) = \{y \,|\, y = f(x)\,,\ x \in M\}$

ii) $f(C) = \{y \,|\, y = f(x)\,,\ x \in C\}\,,\ C \subset M$ heißt Bild von C.

iii) $f^{-1}(D) = \{x \,|\, f(x) \in D\}\,,\ D \subset N$ heißt Urbild von D.

Falls $D = \{b\}$, so heißt

$f^{-1}(D) = \{x \,|\, f(x) = b\}$ Lösungsmenge der Gleichung $f(x) = b$.

Satz 1.5 Sei f Abbildung von M nach N

i) $\forall\, U, V \subset M$ gilt

$f(U \cap V) \subset f(U) \cap f(V)$

$f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$

$f(M \setminus U) \supset f(M) \setminus f(U)$

ii) $\forall\, U, V \subset N$ gilt

$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$

$f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$

$f^{-1}(N \setminus U) = M \setminus f^{-1}(U)$

Beweis.

$$\begin{aligned} y \in f(U \cap V) &\implies \exists\, x \in U \cap V \text{ mit } y = f(x) \\ x \in U \wedge x \in V &\implies y = f(x) \in f(U) \wedge y = f(x) \in f(V) \\ &\implies y \in f(U) \cap f(V) \end{aligned}$$

Rest Übungen $\square$

Def. 1.6 Sei $f : M \to N$ Abb.

i) f heißt <u>injektiv</u>, falls $f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$.

ii) f heißt <u>surjektiv</u>, falls $f(M) = N$.

iii) f heißt <u>bijektiv</u>, falls f injektiv und surjektiv ist.

Def. 1.7 $f : M \to N$, $g : O \to P$, $f(M) \subset O$. Die Abb.

$$\begin{aligned} h : \; M &\longrightarrow P \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned} \tag{1.0.1}$$

heißt <u>Verkettung</u> (Komposition) von g und f, man schreibt $h = g \circ f$.

Def. 1.8

i) Seien M, N zwei Mengen. Die Menge aller geordneten Paare (x, y), $x \in M$, $y \in N$ heißt <u>kartesisches</u> <u>Produkt</u> von M und N.

ii) Sei $f : M \to N$ eine Abbildung, die Menge

$$M \times N \supset G := \{(x,\, f(x)),\;\; x \in M\} \tag{1.0.2}$$

der <u>Graph</u> von f.

2 Reelle Zahlen

2.1 Rechnen mit reellen Zahlen

Axiomatische Einführung

$\mathbb{R}$ ist Menge mit zwei Verknüpfungen, der <u>Addition</u>

$$\begin{aligned} + : \; \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\longmapsto a + b \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

und der <u>Multiplikation</u>

$$\begin{aligned} \cdot : \; \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\longmapsto a \cdot b \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Es gibt eine Anordnung, gegeben durch $\mathbb{R}_+$, Positivitätsbereich.

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{(K)} & \text{Körperaxiome : } \mathbb{R} \text{ ist ein Körper} \\ \text{(O)} & \text{Anordnungsaxiome} \\ & \begin{array}{ll} \text{(O1)} & \text{Für jedes } a \in \mathbb{R} \text{ gilt genau eine der Aussagen} \\ & a \in \mathbb{R}_+ \,,\ -a \in \mathbb{R}_+ \,,\ a = 0 \\ \text{(O2)} & a, b \in \mathbb{R}_+ \implies a + b \in \mathbb{R}_+ \\ \text{(O3)} & a, b \in \mathbb{R}_+ \implies a \cdot b \in \mathbb{R}_+ \end{array} \\ \text{(V)} & \text{Vollständigkeit} \\ & \text{Jede nichtleere nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt eine} \\ & \text{kleinste obere Schranke.} \end{array}\right. \tag{2.1.3}$$

Def. 2.1.1 Ein Körper ist eine nichtleere Menge K mit

$$\begin{array}{rccc} + : & K \times K & \longrightarrow & K \\ & (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & K \times K & \longrightarrow & K \\ & (a,b) & \longmapsto & a \cdot b \end{array},$$

die folgenden Axiomen genügen.

(A1)	$(a+b)+c \;=\; a+(b+c)$	AG
(A2)	$a+b \;=\; b+a$	KG
(A3)	es existiert 0 mit $a+0=a$	Existenz der Null
(A4)	es existiert $-a$ mit $a+(-a)=0$	Existenz der Inversen
(M1)	$(a \cdot b)c \;=\; a(b \cdot c)$	AG
(M2)	$a \cdot b \;=\; b \cdot a$	KG
(M3)	es existiert 1 mit $1 \cdot a \;=\; a$	
(M4)	falls $a \neq 0$, dann existiert a^{-1} mit $a \cdot a^{-1} \;=\; 1$	
(D)	$a(b+c) \;=\; ab+ac$	DG

Satz 2.1.2 Sei K ein Körper. Dann gilt

i) Es gibt nur eine 0 (eine 1).

ii) Das Inverse ist eindeutig.

iii) $a \cdot 0 \;=\; 0$

iv) $(-1) \cdot a \;=\; -a$

v) $(-1)(-1) \;=\; 1$

Beweis:

i) Annahme: $\exists\, 0, 0'$ entsprechend (A3) $\Longrightarrow$
$a + 0 \;=\; a\,,\; a + 0' \;=\; a \;\Longrightarrow$
$a + 0 \;=\; a + 0' \;\Longrightarrow$
$-a + a + 0 \;=\; -a + a + 0' \;\Longrightarrow\; 0 = 0'$

ii) $a + b \;=\; 0\,,\; a + b' \;=\; 0$
$b \overset{(A3)}{=} b + 0 \;=\; b + (a + b') \overset{(A1)}{=} (b + a) + b' \overset{(A2)}{=} (a + b) + b' \;=\; 0 + b' \overset{(A2)}{=} b' + 0 \overset{(A3)}{=} b'$

iii) $a \overset{(M3)}{=} 1 \cdot a \overset{(A3)}{=} (1 + 0) \cdot a \overset{(D)}{=} 1 \cdot a + 0 \cdot a \overset{(M3)}{=} a + 0 \cdot a \;\Longrightarrow$
$a + (-a) \;=\; a + 0 \cdot a + (-a) \;\Longrightarrow\; 0 \;=\; 0 \cdot a + 0$

iv) , v) Übungen $\square$

Bemerkung 2.1.3 Schreibweisen:

$b - a$ statt $b + (-a)\,,$ $ab + c$ statt $(a \cdot b) + c$

$a^n \;=\; \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{mal}},\; a^0 \;=\; 1\,,\; a^{-n} \;=\; (a^{-1})^n$

Regeln der Potenzrechnung

$$\begin{aligned} a^n a^m &= a^{n+m} \\ a^{-n} &= \tfrac{1}{a^n} \\ (a^n)^m &= a^{n \cdot m} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \;:=\; a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \;:=\; a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$$

$$\sum_{k=m}^{m-1} a_k \;:=\; 0$$

2.2 Die Anordnung

Def. 2.2.1 Seien $a, b \in \mathbb{R}$. a heißt kleiner als b, $a < b$, $b > a$, falls $b - a \in \mathbb{R}_+$. Ist a kleiner oder gleich b, so schreibt man $a \le b$, $b \ge a$.

Satz 2.2.2 Es gilt:

i) Eine der folgenden Aussagen ist stets richtig:
$a < b\,,\; a = b\,,\; a > b$

ii) $a < b\,,\ b < c \implies a < c$

iii) $a < b \implies a + c < b + c$

iv) $a < b$ und $c > 0 \implies a \cdot c < b \cdot c$

v) $a < b \implies -b < -a$

vi) $a < b$ und $c < 0 \implies ac > bc$

Beweis: i) (O1) $\implies$ entweder $b - a \in \mathbb{R}_+ \implies a < b$
oder $\mathbb{R}_+ \ni -(b-a) = (-1)(b-a) = -b-(-a) = -b+a = a-b \implies a > b$
oder $b - a = 0 \implies a = b$

iii) $b - a = b - a + c - c = (b+c) - (a+c)$
Rest Übungen □

Bemerkung 2.2.3 ii) - vi) gelten auch für „$\leq$"
Statt i) hat man
vii) stets gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$, gilt beides, so ist $a = b$

Satz 2.2.4 Es gilt entweder $a = 0$ oder $a^2 > 0$.

Beweis. Sei $a \neq 0$. Satz 2.2.2, i) $\implies$ 2 Fälle
$a > 0 \overset{\text{Satz 2.2.2 iv)}}{\implies} a \cdot a > a \cdot 0 = 0 \implies a^2 > 0$
oder
$a < 0 \overset{\text{Satz 2.2.2 v)}}{\implies} -a > 0 \implies (-a)a < -a \cdot 0 = 0 \implies -a^2 < 0 \implies a^2 > 0$ □

Schreibweisen

$$\begin{aligned} M + N &= \{\, a + b \,|\, a \in M\,,\ b \in N \,\} \\ M \cdot N &= \{\, a \cdot b \,|\, a \in M\,,\ b \in N \,\} \\ a + N &= \{\, a + b \,|\, b \in N \,\} \\ a \cdot N &= \{\, a \cdot b \,|\, b \in N \,\} \\ -M &= \{\, -b \,|\, b \in M \,\} \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

$M \leq b$ bedeutet

$$\forall\, a \in M \,:\, a \leq b$$

($M \geq b$ analog)

Def. 2.2.5 Sei $M \subset \mathbb{R}$ nichtleer. Ein <u>Maximum</u> ist eine Zahl $m \in M$ mit $M \leq m$. Ein <u>Minimum</u> ist eine Zahl $m \in M$ mit $m \leq M$.

Satz 2.2.6 Sei $M \subset \mathbb{R}$ nichtleer. Wenn ein Maximum (Minimum) existiert, so ist dieses eindeutig.

Beweis. Annahme: es existieren 2 Maxima $m, m' \in M$

$\overset{\text{Def. 2.2.5}}{\Longrightarrow} \quad m \leq m'\,,\ m' \leq m \quad \overset{\text{Bem. 2.2.3}}{\Longrightarrow} \quad m = m'$

Minimum analog □

Satz 2.2.7 Es seien $M, N \subset \mathbb{R}$ nichtleer. Dann gelten folgende Aussagen, sofern die entsprechenden Minima bzw. Maxima existieren:

i) $M \subset N \implies \max(M) \leq \max(N)$

ii) $\max(M + N) = \max(M) + \max(N)$

iii) $M, N \geq 0 \implies \max(M \cdot N) = \max(M)\max(N)$

iv) $\max(M \cup N) = \max(\max(M), \max(N))$

v) $\min(M) = -\max(-M)$

vi) $M \subset N \implies \min(M) \geq \min(N)$

vii) ii) bis iv) gelten auch für „min“ statt „max“

Beweis.

i) $M \leq \max(M)\,,\ N \leq \max(N)$
$\max(M) \in N \implies \max(M) \leq \max(N)$

ii) $a \in M\,,\ b \in N \implies a + b \leq \max(M) + \max(N)$
$\implies M + N \leq \max(M) + \max(N) \implies \max(M + N) \leq \max(M) + \max(N)$
$\max(M) \in M,\ \max(N) \in N \implies \max(M) + \max(N) \in M + N \implies$
$\max(M) + \max(N) \leq \max(M + N)$

iii) analog

iv) $\max(\max(M),\ \max(N)) \in M \cup N \implies \max(\max(M), \max(N)) \leq \max(M \cup N)$
$a \in M \implies a \leq \max(M) \implies a \leq \max(\max(M), \max(N))$
$\implies M \cup N \leq \max(\max(M), \max(N))$
$\implies \max(M \cup N) \leq \max(\max(M), \max(N))$

v) $\max(-M) \in -M \implies -\max(-M) \in M$
$a \in M \implies -a \in -M \implies -a \leq \max(-M)$
$\overset{\text{Satz 2.2.2, vi)}}{\Longrightarrow} \quad a \geq -\max(-M) \implies -\max(-M) = \min(M)$

vi) , vii) analog □

Def. 2.2.8 Sei $a \in \mathbb{R}$. Der Absolutbetrag $|a|$ von a ist

$$|a| \;=\; \begin{cases} \;\;a\,, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a\,, & \text{falls } a < 0\,. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

$|a| = \max\{a, -a\}\,,\;\; |a| \leq b \iff a \leq b$ und $-a \leq b$

Satz 2.2.9 Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

i) $-|a| \leq a \leq |a|$

ii) $|a| \geq 0\,,\;\; |a| = 0$ für $a = 0$

iii) $|a{+}b| \leq |a|{+}|b|$ Dreiecksungleichung (2.2.3)

iv) $|a \cdot b| = |a||b|$

v) $|a{-}b| \geq \big||a|{-}|b|\big|$ (2.2.4)

Beweis.

i) $|a| = \max\{a, -a\} \implies a \leq |a|\,,\; -a \leq |a| \implies -|a| \leq a \leq |a|$

ii) klar

iii) $-|a| \leq a \leq |a|\,,\;\; -|b| \leq b \leq |b|$
$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b| \implies -(a+b) \leq |a| + |b| \implies$
$\max\{(a+b), -(a+b)\} \leq |a| + |b| \implies |a+b| \leq |a| + |b|$

iv) , v) Übungen □

2.3 Natürliche Zahlen, Induktion. Abzählbarkeit

Def. 2.3.1

i) Die kleinste Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit

   a) $0 \in \mathbb{N}$

   b) Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $n+1 \in \mathbb{N}$.

   heißt Menge der natürlichen Zahlen.

ii) Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen besteht aus allen natürlichen Zahlen n und ihren additiven Inversen $-n$.

iii) Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen besteht aus allen Brüchen $\frac{p}{q}\,,\;\; p, q \in \mathbb{Z}\,,\;\; q \neq 0\,.$

iv) $x \in \mathbb{R}\,,\;\; x \notin \mathbb{Q}$ heißt irrationale Zahl.

A. Induktion

Folgerung 2.3.2 Prinzip der vollständigen Induktion

Es sei $M \subset \mathbb{N}\,,\ 0 \in M$ und

$$n \in M \implies n+1 \in M\,. \tag{2.3.1}$$

Dann ist $M = \mathbb{N}\,.$
(Def. 2.3.1 $\implies \mathbb{N} \subset M \implies \mathbb{N} = M$)

Aufgabe: Zeige Eigenschaft $E(n)$ für alle n.

Vorgehen: Betrachte $M := \{n \in \mathbb{N} \,|\, E(n) \text{ ist wahr}\}$ und zeige.

Es gilt $E(0)$ Induktionsanfang (IA)
gilt $E(n)$ (Induktionsvoraussetzung IV), so gilt auch $E(n+1)$ Induktionsschluss (IS)

$(0 \in M\,,\ (n \in M \implies n+1 \in M) \implies M = \mathbb{N})$

Satz 2.3.3 Natürliche Zahlen sind nichtnegativ.

Beweis. $M \;=\; \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq 0\}$

(IA) $n = 0\,,\ 0 \geq 0$

(IS) $n \longrightarrow n+1$

$$n \geq 0 \overset{\text{Satz 2.2.2, iii)}}{\implies} n+1 \geq 0+1 = 1 > 0$$

□

Satz 2.3.4 $\forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) \;=\; n^2\,. \tag{2.3.2}$$

Beweis.

(IA): $n = 0$

$$\sum_{k=1}^{0} (2k-1) \;= 0 \;= 0^2$$

(IS): $n \longrightarrow n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) \;=\; \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + (2(n+1)-1) \overset{\text{(IV)}}{=} n^2 + 2n + 1 \;=\; (n+1)^2$$

□

Satz 2.3.5 Jede endliche nichtleere Menge reeller Zahlen besitzt ein Maximum.

Beweis. $E(n)$: Jede Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $a_i \in \mathbb{R}$, besitzt Maximum

$$M \;=\; \{n \in \mathbb{N} \,|\, E(n+1) \text{ ist wahr}\}.$$

(IA) $A = \{a_1\}$, $\max A = a_1$

(IS) $n \longrightarrow n+1$

$B \;=\; \{a_1, \dots, a_{n+1}\} \;\Longrightarrow$
$B \;=\; A \cup \{a_{n+1}\}$
IV $\Longrightarrow$ $\max\{A\} = a \;\Longrightarrow\; \max B \;=\; \max(A \cup \{a_{n+1}\})$
$\overset{\text{Satz 2.2.6, Satz 2.2.7 iv)}}{\Longrightarrow} \quad \max(\max\{A\}, a_{n+1}) \;=\; \max(a, a_{n+1})$ □

Satz 2.3.6 Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \notin 0$, dann existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $n = m+1$.

Beweis. IA: $1 = 0 + 1$

IS: $(n+1) \;=\; \underbrace{n}_{m} + 1$ □

Def. 2.3.7

i) Für $n \in \mathbb{N}$ setzt man

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k \;=\; 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n. \tag{2.3.3}$$

ii) Die Binomialkoeffizienten werden durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \;=\; \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}, \quad n, k \in \mathbb{N},\ k \le n \tag{2.3.4}$$

definiert.

Def. 2.3.8 Eine Anordnung einer n-elementigen Menge A ist eine Bijektion

$$f : \{1, \dots, n\} \longrightarrow A.$$

Satz 2.3.9 Die Anzahl der möglichen Anordnungen einer n-elementigen Menge ist $n!$.

Beweis:

(IA): $1! = 1$

(IS): $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$

Menge der Anordnungen $= \bigcup_{l=1}^{n+1} k_l$,
wobei $f \in k_l \iff f(1) = a_l$
IV $\Longrightarrow$ Anzahl $k_l = n! \Longrightarrow$
Anzahl der Anordnungen $= (n+1)n!$ □

B. Der binomische Lehrsatz

Satz 2.3.10 Für $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$ gilt

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}. \tag{2.3.5}$$

Beweis. Übungen $\square$

Satz 2.3.11 (Binomischer Lehrsatz)

Für $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{2.3.6}$$

Beweis.

(IA) $n = 0$ klar

(IS) $n \longrightarrow n+1$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n (a+b) \\
&\overset{\text{(IV)}}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right)(a+b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} \\
&\overset{(2.3.5)}{=} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k
\end{aligned}$$

$\square$

C. Das Wohlordnungsprinzip

Satz 2.3.12 Jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen besitzt ein kleinstes Element.

Beweis. $M \subset \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset \implies \exists\, n \in M$

$M_0 := M \cap \{0, \ldots, n\}$

M_0 endlich $\implies \exists\, m = \min(M_0)$

$M = M_0 \cup (M \backslash M_0) \implies$

$m \leq M \backslash M_0\,,\ m \leq M_0 \implies m \leq M \implies m = \min(M)\,.$ $\square$

D. Abzählbarkeit

Def. 2.3.13

i) Zwei Mengen A, B heißen <u>gleichmächtig</u>, falls es eine bijektive Abbildung $f : A \longrightarrow B$ gibt.

ii) Eine Menge A heißt <u>endlich</u>, falls sie mit einer Menge $\{0, \ldots, n\}$ natürlicher Zahlen gleichmächtig ist. Dann heißt

$$\#A = \text{Anzahl der Elemente in } A$$

die <u>Kardinalität</u> von A.

iii) Eine Menge heißt <u>abzählbar</u>, wenn sie gleichmächtig mit $\mathbb{N}$ ist. Eine Menge heißt <u>überabzählbar</u>, wenn sie weder endlich noch abzählbar ist.

Satz 2.3.14 Jede Menge natürlicher Zahlen ist endlich oder abzählbar.

Beweis. Annahme: $A \subset \mathbb{N}$ nicht endlich.

i) $f(0) := \min(A)$ (Satz 2.3.12!)
$f(n+1) := \min \underbrace{A \backslash \{f(0), \ldots, f(n)\})}_{\neq \emptyset}$

ii) f ist <u>injektiv</u>: $m < n \implies f(n)$ ist kleinstes Element einer Menge, die $f(m)$ <u>nicht</u> enthält $\implies f(m) \neq f(n)\,.$

iii) $m < n \implies f(m) < f(n)$ vollständige Induktion nach m, n fest
IA: $m = 0\,.\ f(n) \in A\,,\ f(0) = \min(A) \implies f(0) \leq f(n)\,.$

IS: $m - 1 \longrightarrow m$
$f(k) < f(n)\,,\ k < m \implies f(n) \neq f(0)\,,\ f(1), \ldots, f(m-1)$
$\implies f(n) \in A \backslash \{f(0), \ldots, f(m-1)\} \implies$
$f(m) \leq f(n) \overset{\text{ii)}}{\implies} f(m) < f(n)\,.$

iv) Wachstum: wir zeigen: $a \leq f(a)\,,\ a \in A$
IA: $n = 0 \quad 0 \leq f(0)$
IS: $n \longrightarrow n+1$
$n \leq f(n) \overset{\text{iii)}}{\implies} n \leq f(n) < f(n+1) \implies n+1 \leq f(n+1)$

v) Surjektivität: $a \in A\,,\ a > f(0)$
$M := \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) < a\}$
$M \neq \emptyset\,,$ endlich nach iv) $\implies \exists\, m = \max(M)$
$\implies f(m) < a\,,\ k < m \overset{\text{iii)}}{\implies} f(k) < f(m) < a$
$\implies M = \{0, \ldots, m\}$

wir zeigen: $a = f(m+1)$
$f(m+1) \; = \; \min(A \backslash \{f(0), \ldots, f(m)\}\,,$
$a \in A\backslash\{f(0), \ldots, f(m)\} \implies f(m+1) \leq a$
wäre $f(m+1) < a$, so folgt $m+1 \in M$
$\implies f(m+1) = a$ $\square$

Satz 2.3.15 A abzählbar, $M \subset A \implies M$ endlich oder abzählbar.

Beweis. Annahme: M nicht endlich
$\exists$ Bijektion $f : \mathbb{N} \longrightarrow A \implies f^{-1}(M)$ nicht endlich
$\overset{\text{Satz 2.3.14}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Bijektion $g : \mathbb{N} \longrightarrow (f^{-1}(M))$

$$\implies f \circ g \; : \; \begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow M \subset A \\ n &\longmapsto f(g(n)) \end{aligned}$$

ist Bijektion (vgl. Def. 1.7). $\square$

Satz 2.3.16 Sei A abzählbar, $f : A \longrightarrow B$ surjektiv $\implies B$ ist höchstens abzählbar.

Beweis. $g : \mathbb{N} \longrightarrow A$ Bijektion $\implies F = f \circ g : \mathbb{N} \longrightarrow B$ surjektiv
$g(F^{-1}(\{b\})) \neq \emptyset \; \forall \, b \in B \overset{\text{Satz 2.3.12}}{\Longrightarrow} \exists \, m = \min(F^{-1}(\{b\}))$

$$m : \; \begin{aligned} B &\longrightarrow \mathbb{N} \\ b &\longmapsto \min(F^{-1}(\{b\})) \end{aligned}$$

ist injektiv.

$\implies m$ ist Bijektion auf $m(B) = \{m(b) \,|\, b \in B\}$
$m(B) \subset \mathbb{N} \overset{\text{Satz 2.3.14}}{\Longrightarrow} m(B)$ ist höchstens abzählbar. $\square$

Satz 2.3.17 Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Beweis.

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & \longrightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \longrightarrow & \frac{4}{1} \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} \\
 & \swarrow & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4}
\end{array}$$

$r_1, r_2, r_3 \ldots$
$0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, r_3, -r_3 \ldots$ $\square$

2.4 Vollständigkeit

A. Beschränkte Mengen reeller Zahlen

Def. 2.4.1 Sei $A \subset \mathbb{R}$. $S \in \mathbb{R}$ heißt <u>obere Schranke</u> für A, falls

$$A \leq S\,. \tag{2.4.1}$$

u heißt <u>untere Schranke</u>, falls

$$u \leq A\,. \tag{2.4.2}$$

A heißt nach <u>oben (unten) beschränkt</u>, falls A eine obere (untere) Schranke besitzt. A heißt <u>beschränkt</u>, falls A eine obere und untere Schranke besitzt.

Beispiele 2.4.2 Intervalle

$$\begin{aligned} [a,b] &= \{\,x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\,\} && \text{abgeschlossen} \\ (a,b) &= \{\,x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\,\} && \text{offen} \\ [a,b) &= \{\,x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\,\} && \text{halboffen} \\ (a,b] &= \{\,x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\,\} && \text{halboffen} \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

B. Vollständigkeitsaxiom

(V): Jede nichtleere nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt eine kleinste obere Schranke.

Def. 2.4.3 Die kleinste obere Schranke g heißt auch <u>obere Grenze</u> oder <u>Supremum</u> von A,

$$g \;=\; \sup A\,. \tag{2.4.4}$$

Die größte untere Schranke h heißt auch <u>untere Grenze</u> oder <u>Infimum</u> von A,

$$h \;=\; \inf A\,. \tag{2.4.5}$$

Satz 2.4.4 Jede nach unten beschränkte Menge A reeller Zahlen besitzt eine größte untere Schranke und es gilt

$$\inf A \;=\; -\sup(-A)\,. \tag{2.4.6}$$

Beweis. $-A$ nach oben beschränkt $\overset{(V)}{\Longrightarrow}$ $\sup(-A)$ existiert

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad x \;\leq\; \sup(-A) \qquad \forall\, x \in -A \\ &\Longrightarrow \quad -x \;\geq\; -\sup(-A) \quad \forall\, x \in -A \\ &\Longrightarrow \quad y \;\geq\; -\sup(-A) \quad \forall\, y \in A \\ &\Longrightarrow \quad -\sup(-A) \text{ ist untere Schranke!} \\ &\qquad\quad h \leq A \Longrightarrow -h \geq -A \Longrightarrow -h \geq \sup(-A) \\ &\Longrightarrow \quad h \leq -\sup(-A) \Longrightarrow -\sup(-A) = \inf(A) \end{aligned}$$

□

Satz 2.4.5 g ist genau dann obere Grenze von A, $g = \sup(A)$, falls gilt

i) $x \leq g \;\forall x \in A$

ii) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x \in A$ mit $g - \varepsilon < x \leq g$

Beweis.
„$\Longrightarrow$" i) klar; nehme an, ii) gelte nicht $\Longrightarrow$ $x \leq g - \varepsilon$ $\Longrightarrow$ $g - \varepsilon$ ist obere Schranke.
„$\Longleftarrow$" Sei $g' = g - \varepsilon$ weitere obere Schranke $\Longrightarrow$ $x \leq g - \varepsilon \;\; \forall x \in A$ $\square$

Beispiel 2.4.6 Es gilt $\sup[a, b) = b$
denn: $x \leq b \;\; \forall x \in [a, b)$, zu $\varepsilon > 0$ wähle $x = b - \frac{\varepsilon}{2}$
$\Longrightarrow$ $b - \frac{\varepsilon}{2} < b$ und $b - \varepsilon < b - \frac{\varepsilon}{2} \leq b$

C. Das archimedische Prinzip

Satz 2.4.7 $\mathbb{N}$ ist unbeschränkt.

Beweis. Annahme: $\mathbb{N}$ sei beschränkt $\Longrightarrow$

$$n \;\leq\; \sup(\mathbb{N}), \quad n \in \mathbb{N}$$

$\Longrightarrow$ $\exists\, n_0 \;>\; \sup(\mathbb{N}) - 1$ $\Longrightarrow$ $n_0 + 1 \;>\; \sup(\mathbb{N})$. $\square$

Satz 2.4.8 $\mathbb{R}$ ist archimedisch geordnet, d.h. $\forall\, a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ $\;\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit

$$na \;\geq\; b\,. \tag{2.4.7}$$

Beweis. Annahme: $na \leq b \;\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\Longrightarrow$
$n \leq \frac{b}{a} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ $\Longrightarrow$ $\frac{b}{a}$ ist obere Schranke, $\overset{\text{Satz 2.4.7}}{\Longrightarrow}$ Widerspruch $\square$

Satz 2.4.9 Ist $a \geq 0$ und $a \leq \frac{1}{n} \quad \forall\, n \neq 0$ $\Longrightarrow$ $a = 0$.

Beweis. Annahme: $a > 0$ $\Longrightarrow$ $n \cdot a \leq 1$ $\Longrightarrow$ $n \leq \frac{1}{a}$
$\Longrightarrow$ $\frac{1}{a}$ ist obere Schranke, Widerspruch. $\square$

Satz 2.4.10 Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, dann existiert ein $r \in \mathbb{Q}$ mit

$$a < r < b\,.$$

Beweis. Zunächst $a > 0$. Gesucht $m, n \in \mathbb{N}$ mit

$$a < \frac{m}{n} < b \iff na < m < nb$$

Satz 2.4.8 $\Longrightarrow$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $n(b - a) > 1$

$m := \max\{\, p \in \mathbb{N} \,|\, p \leq na + 1\,\}$

$na < m \leq na + 1 < na + n(b - a) = nb$

$a < 0$: wähle $r, l \in \mathbb{Q}$ mit $l > -a$ und $a + l < r < b + l$

$\Longrightarrow$ $a < r - l < b$ $\square$

3 Folgen und Reihen

3.1 Reelle Funktionen

Def. 3.1.1 Sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Abbildung $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt reelle Funktion.

$$\Gamma_f := \{ (x, y) \in D \times \mathbb{R} \,,\; y = f(x) \} \tag{3.1.1}$$

heißt Graph von f. D heißt Definitionsbereich.

Beispiele 3.1.2

i) Polynome

$$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$
$$\begin{aligned} p : \;\; & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \end{aligned}$$

ii) rationale Funktionen

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \qquad q(x) = \sum_{i_0}^{m} b_i x^i$$
$$D := \{ x \in \mathbb{R} \,|\, q(x) \neq 0 \}$$
$$\begin{aligned} r : \;\; & D \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \end{aligned}$$

iii) Treppenfunktionen

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$
$$c_1, \ldots, c_n, d_0, \ldots, d_n \in \mathbb{R}$$
$$\begin{array}{rccl} \varphi : & [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \varphi(A) = \begin{cases} c_k \,, & \text{falls } x \in (t_{k-1}, t_k) \\ d_k \,, & \text{falls } x = t_k \end{cases} \end{array}$$

iv)
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} 0 \,, & \text{falls } x \text{ rational} \\ 1 \,, & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases} \end{array}$$

Def. 3.1.3 Seien $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Wir setzen

$$\begin{array}{rccl} f + g : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (f + g)(x) := f(x) + g(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \lambda f : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} f\cdot g: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (f\cdot g)(x) := f(x)\cdot g(x) \end{array}$$

Sei $D' = \{\, x \in D \,|\, g(x) \neq 0 \,\}$

$$\begin{array}{rccl} \dfrac{f}{g}: & D' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

Seien $f : D \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ g : E \longrightarrow \mathbb{R}\,,$
$f(D) \subset E \implies \exists$ Kompositum $(f \circ g)(x) = g(f(x))$

Beispiel 3.1.4

$q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\quad x \longrightarrow x^2$

$\mathrm{sqrt} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}\,,\quad x \longrightarrow \sqrt{x}$

$\mathrm{abs} := \mathrm{sqrt} \circ q$

$\mathrm{abs}(x) = (\mathrm{sqrt} \circ g)(x) = \mathrm{sqrt}(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$

3.2 Folgen und Konvergenz

A. Grundbegriffe

Def. 3.2.1 Eine Funktion

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt <u>Folge</u>. Man schreibt $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,,\ (a_0, a_1, a_2, \ldots)\,,\ \{a_n\}\,.$ ($\{a_n\}_{n\geq n_0}\,,\ (a_{n_0}, a_{n_0+1}, \ldots)$ heißt ebenfalls Folge).

Beispiele 3.2.2

i) $a_n = a \;\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad (a, a, a, \ldots)$

ii) $a_n = \dfrac{1}{n}\,,\ n \geq 1 \qquad \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots\right)$

iii) $a_n = (-1)^n : \qquad (1, -1, 1, -1, \ldots)$

iv) $a_n = \dfrac{n}{n+1} : \qquad \left(0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots\right)$

v) $a_0 = 1\,,\ a_1 = 1\,,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\,,\ n \geq 2$
$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$ „Fibonacci-Zahlen“

Def. 3.2.3 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt (streng) <u>monoton wachsend</u>, falls aus $n < m$ stets $a_n \leq a_m$ $(a_n < a_m)$ folgt. <u>Monoton fallend</u> analog. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt <u>nach oben beschränkt</u>, falls

$r \in \mathbb{R}$ existiert mit $a_n \le r \;\forall\, n$. Nach unten beschränkt analog. $\{a_n\}$ heißt beschränkt, falls beides gilt, $\iff |a_n| \le M \;\forall\, n$.

B. Konvergenz

Def. 3.2.4 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \ge N(\varepsilon) \; : \; |a_n - a| < \varepsilon \tag{3.2.1}$$

($\iff$ in jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x-a| < \varepsilon\}$ liegen fast alle Glieder der Folge)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt divergent, falls sie gegen keine reelle Zahl konvergiert.

Beispiele 3.2.2

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \qquad |a_n - a| = 0 < \varepsilon \;\forall\, n \ge 0$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \varepsilon > 0$ fest, $N(\varepsilon) > \dfrac{1}{\varepsilon} \implies \left|\dfrac{1}{n} - 0\right| = \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{N(\varepsilon)} \le \varepsilon\,,\; n \ge N(\varepsilon)$

iii) divergent

Annahme: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\implies |a_n - a| < 1\,,\; n \ge N(1)$

$$2 \;=\; |(-1)^{n+1} - (-1)^n| \;=\; |a_{n+1} - a_n| \;=\; |a_{n+1} - a + a - a_n|$$
$$\overset{(2.2.3)}{\le} \; |a_{n+1} - a| + |a - a_n| \;<\; 1 + 1 = 2 \qquad \text{(Widerspruch)}$$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} \;=\; 1$

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| \;=\; \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| \;=\; \frac{1}{n+1} \;<\; \varepsilon\,, \quad n \ge \frac{1}{\varepsilon}$$

Satz 3.2.5 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\implies \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

Beweis. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \implies |a_n - a| < 1 \quad \forall\, n \ge N(1)$

$\implies \; |a_n| \;=\; |a_n - a + a| \;\le\; |a_n - a| + |a| \;\le\; 1 + |a|$

$\implies \; M := \max\{\, |a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{N(1)-1}|,\, |a| + 1 \,\}$ $\square$

Satz 3.2.6 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $a, a' \implies a = a'$.

Beweis. Annahme: $a' \ne a\,,\; \varepsilon := \dfrac{|a-a'|}{2}$

$\exists\, N_1$ mit $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\, n \ge N_1$

$\exists\, N_2$ mit $|a_n - a'| < \varepsilon \quad \forall\, n \ge N_2$

$N := \max(N_1, N_2) \implies$

$|a - a'| \;=\; |a - a_n + a_n - a'| \;\le\; |a - a_n| + |a_n - a'| \;<\; \varepsilon + \varepsilon \;=\; 2\,\dfrac{|a-a'|}{2} \;=\; |a - a'|\,,$
$n \ge N\,,$ Widerspruch $\square$

Satz 3.2.7 Sei $A \subset \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt, $g = \sup A$
$\Longrightarrow \quad \exists \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,,\ a_n \in A\,,$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g\,.$

Beweis. Satz 2.4.5 $\Longrightarrow\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists a_n$ mit

$$g - \frac{1}{n} \ \le\ a_n\ \le\ g \quad\Longrightarrow\quad -\frac{1}{n}\ <\ 0\ \le\ g - a_n\ \le\ \frac{1}{n} \quad\Longrightarrow\quad |g - a_n|\ \le\ \frac{1}{n}$$

□

Satz 3.2.8 Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, nach oben beschränkt $\Longrightarrow$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ =\ \sup\{\, a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\,\}\,.$$

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $g - \varepsilon < a_{n_0} \le g$, wobei $g := \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ sei.

$\Longrightarrow \quad g - \varepsilon < \ a_{n_0} \le a_n \le g < g + \varepsilon\,, \quad n \ge n_0$

$\Longrightarrow \quad -\varepsilon < a_n - g < \varepsilon\,, \quad n \ge n_0$

analog für „monoton fallend, nach unten beschränkt“. □

Beispiel 3.2.9 $a_n \ =\ \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$

$a_1 \ =\ 1 + \frac{1}{2} \ =\ 1.5$

$a_2 \ =\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ \approx\ 1.08$

$a_3 \ =\ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \ \approx\ 0.95$

Vermutung: (a_n) monoton fallend

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n \ &=\ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n} - \cdots - \frac{1}{2n} \\ &=\ \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n}\ <\ \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\ =\ 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow\ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, nach unten beschränkt

$\overset{\text{Satz 3.2.8}}{\Longrightarrow}\ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent

C. Rechenregeln

Satz 3.2.10 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,,\ \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen, $a_n \le b_n\,,\ \ n \in \mathbb{N} \ \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ \le\ \lim_{n\to\infty} b_n$$

Beweis. $a := \lim\limits_{n\to\infty}\,,\quad b := \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Annahme: $a > b\,,\ \ \varepsilon := \frac{a-b}{2} \quad\Longrightarrow\quad |a - a_n| < \varepsilon\,,\ |b - b_n| < \varepsilon\,,\ \ n \ge N(\varepsilon)$

$$\Longrightarrow \quad b_n < b+\varepsilon \;=\; b+\frac{a-b}{2} \;=\; \frac{b+a}{2} \;=\; a-\varepsilon < a_n\,, \quad n \geq N(\varepsilon)$$ □

Satz 3.2.11 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,,\ \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\Longrightarrow$ $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,,$
$c_n := a_n + b_n$ ist konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} c_n \;=\; \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \;=\; a+b \;=\; c \tag{3.2.2}$$

Beweis. $\varepsilon > 0$ beliebig $\Longrightarrow$

$|a_n - a| \;<\; \dfrac{\varepsilon}{2}\,, \quad n \geq N_1$

$|b_n - b| \;<\; \dfrac{\varepsilon}{2}\,, \quad n \geq N_2$

$N := \max(N_1, N_2) \;\Longrightarrow$

$$|c_n - c| \;=\; |(a_n+b_n)-(a+b)| \;\leq\; |a_n-a|+|b_n-b| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon\,, \quad n \geq N$$

□

Beispiel 3.2.2 iv) $c_n = \dfrac{n+1}{n}\,, \quad n \geq 1$

$c_n \;=\; a_n + b_n\,, \quad a_n := 1\,, \quad b_n = \dfrac{1}{n} \quad \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} c_n \;=\; \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \;=\; 1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \;=\; 1$$

Satz 3.2.12 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\,,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \quad \Longrightarrow$
$\{a_n b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n \;=\; \big(\lim_{n\to\infty} a_n\big)\big(\lim_{n\to\infty} b_n\big) \;=\; a\cdot b \tag{3.2.3}$$

Beweis. Satz 3.2.4 $\Longrightarrow$ $|b| \leq K, \forall\, n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K \;\Longrightarrow$

$|a_n - a| \;<\; \dfrac{\varepsilon}{2K}\,, \quad n \geq N_1$

$|b_n - b| \;<\; \dfrac{\varepsilon}{2K}\,, \quad n \geq N_2$

$N := \max(N_1, N_2) \;\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| \quad &= \quad |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\
&\leq \quad |a_n(b_n-b)| + |(a_n-a)b| \\
&\overset{\text{Satz 2.2.9}}{=} \quad \underbrace{|a_n|}_{\leq K}\underbrace{|b_n-b|}_{<\frac{\varepsilon}{2K}} + \underbrace{|b|}_{\leq K}\underbrace{|a_n-a|}_{<\frac{\varepsilon}{2K}} \\
&< \quad \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon\,, \quad n \geq N
\end{aligned}$$

□

Korollar 3.2.13

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = a\,, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow$
$\{\lambda a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n \;=\; \lambda \lim_{n\to\infty} a_n \;=\; \lambda a \tag{3.2.4}$$

ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = a\,, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \quad \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n \;=\; a - b \tag{3.2.5}$$

Beweis. Übungen $\square$

Satz 3.2.14 $\lim_{n\to\infty} a_n = a\,, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0 \quad \Longrightarrow$
$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0\,,\ n \geq n_0$ und

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \;=\; \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \;=\; \frac{a}{b} \tag{3.2.6}$$

Beweis. Zunächst $a_n = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$b \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad |b_n - b| \leq \frac{|b|}{2}\,, \quad n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad |b| - |b_n| \;\leq\; \big||b| - |b_n|\big| \;\leq\; |b - b_n| \;<\; \frac{|b|}{2}$

$\Longrightarrow \quad \frac{|b|}{2} \leq |b_n| \quad \Longrightarrow \quad b_n \neq 0\,, \quad n \geq n_0$

$\exists\, N_1$ mit $|b_n - b| \;<\; \varepsilon\, \frac{|b|^2}{2} \quad \forall\, n \geq N_1$

$N := \max(N_1, n_0) \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \;&=\; \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| \;=\; \frac{1}{|b_n||b|}\, |b - b_n| \\
&\leq\; \frac{2}{|b|} \cdot \frac{1}{|b|}\, |b - b_n| \\
&\leq\; \frac{2}{|b|^2}\, \frac{\varepsilon |b|^2}{2} = \varepsilon\,, \quad n \geq N
\end{aligned}$$

$$\frac{a_n}{b_n} \;=\; a_n \cdot \frac{1}{b_n} \;\overset{\text{Satz 3.2.12}}{\Longrightarrow}\; \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \;=\; \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \;=\; \frac{a}{b}$$

$\square$

Beispiel 3.2.15 $c_n \;=\; \dfrac{3n^2 + 13n}{n^2 - 2}$

$$c_n \;=\; \frac{3n^2 + 13n}{n^2 - 2} \;=\; \frac{n^2(3 + \frac{13}{n})}{n^2(1 - \frac{2}{n^2})} \;=\; \frac{3 + \frac{13}{n}}{1 - \frac{2}{n^2}} \;=\; \frac{a_n}{b_n}$$

Beispiel 3.2.2 $\implies \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

$$\overset{\text{Satz 3.2.12}}{\implies} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} \overset{\text{Korollar 3.2.13}}{=} 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$$

$$\implies \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{13}{n}}{1-\frac{2}{n^2}} \overset{\text{Satz 3.2.14}}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac{13}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{2}{n^2})} = \frac{3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{13}{n}}{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}} = 3$$

Beispiel 3.2.16 Die Zahl e

$$e := \lim_{n\to\infty} a_n\,, \quad a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1 \tag{3.2.7}$$

Wir zeigen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{A.)} & a_n \text{ ist streng monoton wachsend} \\ \text{B.)} & a_n \text{ ist beschränkt} \end{array}\right\} \overset{\text{Satz 3.2.8}}{\implies} \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent}$$

Zu A.) zu zeigen: $a_{n+1} > a_n$, also

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \iff$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$= \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n\left(\tfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{-n-1}$$

$$= \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{-1} = \tfrac{n}{n+1} = 1-\tfrac{1}{n+1}$$

zu zeigen:

$$\left(1-\left(\frac{1}{n+1}\right)^2\right)^{n+1} > 1-\frac{1}{n+1} \tag{3.2.8}$$

Es gilt die <u>Bernoulli-Ungleichung</u> (Übung)

$$(1+a)^n > 1+na\,, \quad a\neq 0\,,\ a>-1 \quad n\geq 2 \tag{3.2.9}$$

$$\overset{(3.2.9)}{\implies} \quad \left(1-\left(\frac{1}{n+1}\right)^2\right)^{n+1} > 1-(n+1)\left(\frac{1}{n+1}\right)^2 = 1-\frac{1}{n+1} \implies (3.2.8)$$

B.) Es gilt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{Satz 2.3.11}}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$$

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1\cdot n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!\,n\cdot n\cdot n\cdot n\cdots n} < \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}\,, \quad k\geq 2$$

$$\Longrightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;\leq\; 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$$

Es gilt die geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} q^k \;=\; \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,, \quad q \neq 1\,, \quad n \geq 0\,. \tag{3.2.10}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k \overset{(3.2.10)}{=} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \;<\; 2$$

$$\Longrightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \qquad \Box$$

Also existiert $e := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Es gilt weiter

$$e \;=\; \lim_{n\to\infty} b_n\,, \quad b_n := \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\,. \tag{3.2.11}$$

$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, $a_n < b_n < 3$

$\overset{\text{Satz 3.2.8}}{\Longrightarrow} \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n \;=\; e' \quad \overset{\text{Satz 3.2.10}}{\Longrightarrow}$

$$e = \lim_{n\to\infty} a_n \;\leq\; \lim_{n\to\infty} b_n = e'$$

Es ist zu zeigen: $e \geq e'$. Sei dazu $m \geq 1$ fest. Dann gilt für $n > m$

$$a_n \;=\; \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \;>\; \sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \;=\; \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\;\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n\cdot n\cdots n}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad e \;=\; \lim_{n\to\infty} a_n \quad &\geq \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\;\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n\cdot n\cdots n} \\
&\overset{\text{Satz 3.2.11}}{=} \sum_{k=0}^{m}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k!}\;\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n\cdot n\cdots n} \\
&\overset{\text{Satz 3.2.12}}{=} \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} \;=\; b_m
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad b_m \leq e \quad \Longrightarrow \quad \lim_{m\to\infty} b_m \;=\; e' \leq e \qquad \Box$$

Def. 3.2.17 Ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge und $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, so heißt

$$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \tag{3.2.12}$$

eine Teilfolge.

Satz 3.2.18 Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\,,\ f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ injektiv. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_{f(n)} \;=\; a \tag{3.2.13}$$

Beweis. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \implies a_n \in U_\varepsilon(a)$ außer $a_0,\ldots,a_m$
f injektiv $\implies \exists$ höchstens $m+1$ paarweise verschiedene Zahlen mit $f(n)\in\{0,\ldots,m\}$
$\implies$ für fast alle n gilt $f(n)\notin\{0,\ldots,m\}$
$\implies$ für fast alle n gilt $a_{f(n)}\in U_\varepsilon(a)$ $\square$

D. Konvergenzkriterien

Def. 3.2.19 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge (Fundamentalfolge), falls gilt:

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,n_0\in\mathbb{N}\ \ \forall\,m,n\geq n_0 : |a_n-a_m|<\varepsilon\,. \tag{3.2.14}$$

Beispiel 3.2.20 $a_n = a_{n-1}+a_{n-2}$ (vgl. Beispiel 3.2.2)

$$b_n := \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_n+a_{n-1}} = \frac{1}{1+\frac{a_{n-1}}{a_n}} = \frac{1}{1+b_{n-1}}$$

$\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}_+$ streng monoton wachsend $\implies b_n\in(0,1) \implies b_{n+1}>\dfrac{1}{2} \implies$

$$|b_{n+k+1}-b_{n+1}| \;=\; \left|\frac{1}{1+b_{n+k}}-\frac{1}{1+b_n}\right|$$

$$= \frac{|b_{n+k}-b_n|}{|1+b_n||1+b_{n+k}|} \;\leq\; \left(1+\frac{1}{2}\right)^{-2}|b_{n+k}-b_n| \;=\; \frac{4}{9}\,|b_{n+k}-b_n|$$

$$\overset{\text{Induktion}}{\implies}\quad |b_{n+k+1}-b_{n+1}| \;\leq\; \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\underbrace{|b_k-b_0|}_{\leq 1} \;\leq\; \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$$

Wähle n_0 mit $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n_0}<\varepsilon \implies |b_m-b_n|<\varepsilon$

$\implies \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge

Satz 3.2.21 Eine Folge reeller Zahlen ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Beweis. „$\Longrightarrow$“ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\implies$

zu $\varepsilon>0\ \exists\,n_0(\varepsilon)$ mit $|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2},\ n\geq n_0 \implies$

$$|a_n-a_m| \;=\; |a_n-a+a-a_m| \;\leq\; \underbrace{|a_n-a|}_{\leq\frac{\varepsilon}{2}}+\underbrace{|a-a_m|}_{\leq\frac{\varepsilon}{2}}<\varepsilon\,,\quad n,m\geq n_0$$

„$\Longleftarrow$“ Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge.

i) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt

$\varepsilon = 1 \implies |a_n - a_m| < 1$ für $n, m \geq n_0 \implies$

$1 \; > \; |a_n - a_{n_0}| \; \geq \; \big||a_n| - |a_{n_0}|\big| \; \geq \; |a_n| - |a_{n_0}| \implies$

$1 + |a_{n_0}| \; > \; |a_n|\,, \quad n \geq n_0 \implies |a_n| \; \leq \; 1 + |a_{n_0}| + \max\big\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|\big\}$

ii) $X = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a_n \leq x$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}\}$

wir zeigen: $X \neq \emptyset$, nach oben beschränkt

i) $\implies |a_n| < K \implies -K < a_n < K \implies -K \in X \implies$

$X \neq \emptyset$ und $X \leq K \overset{(V)}{\implies} \exists\, g := \sup X$

iii) wir zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$

Sei $\varepsilon > 0 \implies g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$ für unendlich viele n.

Beweis hierzu: Wähle $x \in X$ mit $g - \varepsilon < x \implies a_n > x$ für fast alle n

$\implies a_n > g - \varepsilon$ für fast alle n

$a_n \; < \; g + \varepsilon$ für endlich viele $n \implies$

$a_n \; \leq \; g + \dfrac{\varepsilon}{2}$ für endlich viele $n \implies g + \frac{\varepsilon}{2} \in X \implies g \neq \sup X$ (Widerspruch)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge $\implies |a_m - a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}\,,\; m, n \geq n_0$

$\exists\, m_0 \geq n_0$ mit $g - \dfrac{\varepsilon}{2} \; < \; a_{m_0} \; < \; g + \dfrac{\varepsilon}{2}$

$$\begin{aligned} \implies |a_{m_0} - g| \; &< \; \frac{\varepsilon}{2} \\ \implies |a_n - g| \; &\leq \; |a_n - a_{m_0} + a_{m_0} - g| \\ &\leq \; \underbrace{|a_n - a_{m_0}|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{m_0} - g|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} \; < \; \varepsilon\,, \quad n \geq m_0 \end{aligned}$$

□

Def. 3.2.22 $g \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists \text{ unendlich viele } n \text{ mit } |a_n - g| < \varepsilon\,. \tag{3.2.15}$$

Satz 3.2.23 (Bolzano/Weierstraß)
Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis. Beweis von Satz 3.2.21 $\implies$ jede beschränkte Folge besitzt Häufungspunkt g

$\implies \exists\, n_1$ mit $|a_{n_1} - g| < 1\,,\; n_2 > n_1$ mit $|a_{n_2} - g| \; < \; \dfrac{1}{2}$

$\implies \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = g$, denn für $\dfrac{1}{k_0} < \varepsilon$ folgt

$$|a_{n_k} - g| < \frac{1}{k} < \frac{1}{k_0} < \varepsilon\,, \quad k \geq k_0$$

$\square$

Def. 3.2.24 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt <u>bestimmt divergent</u> (<u>uneigentlich konvergent</u>) gegen ∞, falls $\forall\, k \in \mathbb{R} \;\; \exists\, N \in \mathbb{N}$ mit

$$a_n > k\,, \quad n \geq N\,. \tag{3.2.16}$$

Man schreibt auch: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

3.3 Unendliche Reihen

A. Definition, Konvergenz

Def. 3.3.1 Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Die Folge

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k\,, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.3.1}$$

der <u>Partialsummen</u> heißt <u>unendliche Reihe</u> $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$. Falls s_n konvergiert, so schreibt man

$$s := \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,. \tag{3.3.2}$$

s heißt <u>Summe der Reihe</u>.

Bemerkung 3.3.2 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ existiert genau dann, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \geq N(\varepsilon) : \left| \sum_{k=0}^{n} a_k - s \right| < \varepsilon\,. \tag{3.3.3}$$

Satz 3.3.3 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ existiert genau dann, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N(\varepsilon)\; \forall\, m \geq n \geq N(\varepsilon) : \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon\,. \tag{3.3.4}$$

Beweis. Satz 3.2.21: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \iff \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy Folge

$$\iff |s_m - s_{n-1}| = \left| \sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right| = \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

für m, n hinreichend groß. $\square$

Beispiele 3.3.4

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ Man kann zeigen (Übungen)

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \Longrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \overset{\text{Bsp. 3.2.2}}{=} 1 \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \overset{(3.2.13)}{=} e$$

iii) geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k\,, \quad |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k \overset{(3.2.12)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n-1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ harmonische Reihe

$$s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{n-1} \left(\sum_{k=2^l+1}^{2^{l+1}} \frac{1}{k} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)}_{\geq \frac{1}{2}}$$

$$\geq 1 + \frac{n}{2} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ ist } \underline{\text{divergent}}$$

Satz 3.3.5 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,, \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent $\Longrightarrow$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (ta_k + ub_k)\,,\ t, u \in \mathbb{R}$ ist konvergent und

$$\sum_{k=0}^{\infty} (ta_k + ub_k) = t \sum_{k=0}^{\infty} a_k + u \sum_{k=0}^{\infty} b_k \tag{3.3.5}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} s_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(ta_k+ub_k)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(t\sum_{k=0}^{n}a_k + u\sum_{k=0}^{n}b_k\right) \\
&\overset{\text{Satz 3.2.11, Korollar 3.2.13}}{=} t\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k + u\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}b_k \\
&= t\sum_{k=0}^{\infty}a_k + u\sum_{k=0}^{\infty}b_k
\end{aligned}$$

□

Satz 3.3.6 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $a_k \geq 0$ konvergiert genau dann, wenn $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

Beweis.

„$\Longrightarrow$" $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent $\Longleftrightarrow$ $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent

$\overset{\text{Satz 3.2.5}}{\Longrightarrow}$ $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt

„$\Longleftarrow$" $a_k \geq 0 \Longrightarrow \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend

$\overset{\text{Satz 3.2.8}}{\Longrightarrow}$ $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent □

Satz 3.3.7 (Leibniz-Kriterium)

Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallende Nullfolge, $a_n \geq 0 \Longrightarrow$ die <u>alternierende Reihe</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n \tag{3.3.6}$$

ist konvergent.

Beweis.

$$\begin{aligned}
s_{2m} &= (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \ldots a_{2m} \geq 0 \\
s_{2m+1} &= a_0 - (a_1 - a_2) + \ldots a_{2m+1} \leq a_0 \\
s_{2m+2} &= s_{2m} + (-1)^{2m+1}a_{2m+1} + (-1)^{2m+2}a_{2m+2} \\
&= s_{2m} - a_{2m+1} + a_{2m+2} \leq s_{2m} \\
s_{2m+1} &= s_{2m-1} + (-1)^{2m}a_{2m} + (-1)^{2m+1}a_{2m+1} \\
&= s_{2m-1} + a_{2m} - a_{2m+1} \geq s_{2m-1}
\end{aligned}$$

$\overset{\text{Satz 3.2.8}}{\Longrightarrow}$ $\{s_{2m}\}_{m\in\mathbb{N}}, \{s_{2m+1}\}_{m\in\mathbb{N}}$ konvergent

$$\begin{aligned}
s_{2m} &= s_{2m-1} + (-1)^{2m}a_{2m} \\
&= s_{2m-1} + a_{2m} \overset{\text{Satz 3.2.9}}{\Longrightarrow}
\end{aligned}$$

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m} = \lim_{m\to\infty} s_{2m-1} + \underbrace{\lim_{m\to\infty} a_{2m}}_{-0} = s$$

$$\overset{\text{Aufgabe 14, Blatt 4}}{\Longrightarrow} \lim_{m\to\infty} s_m = s \qquad \square$$

Beispiel 3.3.8

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots$$

ist konvergent.

Satz 3.3.9 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent $\Longrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$

Beweis. Satz 3.3.3 $\Longrightarrow \left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon, m \geq n \geq N(a)$

speziell $m = n \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon, n \geq N(\varepsilon)$ $\square$

B. Konvergenzkriterien

Def. 3.3.10 Eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt <u>absolut konvergent</u>, wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Satz 3.3.11 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\Longrightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent und

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \tag{3.3.7}$$

Beweis. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent $\overset{\text{Satz 3.3.3}}{\Longrightarrow}$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \text{ mit } \left|\sum_{k=n}^{m} |a_k|\right| = \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon, \quad m \geq n \geq N(\varepsilon)$$

$$\Longrightarrow \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ erfüllt Cauchy-Kriterium} \overset{\text{Satz 3.3.3}}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\left|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k\right| \overset{\text{Aufgabe 18, Blatt 5}}{=} \lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \overset{\text{Satz 3.2.8}}{\leq} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k| \qquad \square$$

Satz 3.3.12 (Majorantenkriterium)

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, $b_k \geq 0, |a_k| \leq b_k \Longrightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent

Beweis.

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k \overset{\text{Satz 3.2.6}}{\Longrightarrow} \text{Beh.} \qquad \square$$

Satz 3.3.13 (Quotientenkriterium)

Sei $a_k \neq 0$ für fast alle k, $\exists\, 0 < q < 1$ mit

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q \quad \text{für fast alle } k \tag{3.3.8}$$

$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.

Gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1 \quad \text{für fast alle } k, \tag{3.3.9}$$

so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Beweis.

$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q \Longrightarrow |a_1| \leq q|a_0| \Longrightarrow |a_2| \leq q|a_1| \leq q^2|a_0|$

Induktion $\Longrightarrow |a_k| \leq q^k|a_0| \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq |a_0| \sum_{k=0}^{n} q^k = |a_0|\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \leq |a_0|\frac{1}{1-q} < \infty$

$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq 1 \Longrightarrow |a_{k+1}| \geq |a_k| \geq \cdots \geq |a_0| > 0$

$\Longrightarrow \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ <u>keine</u> Nullfolge

$\overset{\text{Satz 3.3.9}}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent $\square$

Beispiel 3.3.14 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}\frac{2^k}{k^2} = \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{3}\Big)^2 = \frac{8}{9} =: q < 1, \quad k \geq 3
\end{aligned}$$

Satz 3.3.13 $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ konvergent!

Satz 3.3.15 (Wurzelkriterium)

Gilt

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \rho, \quad 0 < \rho < 1, \quad \text{für fast alle } k, \tag{3.3.10}$$

so ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent. Ist $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ für fast alle k, so folgt Divergenz.

Beweis.

$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \rho \Longrightarrow |a_k| \leq \rho^k, \quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} \rho^k = \dfrac{1}{1-q}$

$\overset{\text{Satz 3.3.12}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent

$\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1 \Longrightarrow |a_k| \geq 1 \Longrightarrow \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge $\square$

C. Umordnung

Beispiel 3.3.16

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} \overset{\text{Satz 3.3.7}}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} = s$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \dots$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \dots$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right)$$
$$\Longrightarrow s' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right) = \frac{1}{2}s$$

Def. 3.3.17 Sei $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijektiv, $b_k = a_{\sigma(k)}$.
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ heißt <u>Umordnung</u> der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Satz 3.3.18 $a_k \geq 0 \;\forall\, k \in \mathbb{N}, \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = s \Longrightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = s$ für jede Umordnung.

Beweis.

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$
$$s'_m := \sum_{k=0}^{m} a_{\sigma(k)}$$

s_n, s'_m monoton wachsend

$n := \max\{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(m)\} \Longrightarrow$

$s'_m \leq s_n \leq s \Longrightarrow \lim\limits_{m\to\infty} s'_m = s' \leq s$

aber: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist Umordnung von $\sum_{k=0}^{\infty} b_k, a_k = b_{\sigma^{-1}(k)} \Longrightarrow$

$\lim_{n\to\infty} s_n \leq \lim_{m\to\infty} s'_m \Longrightarrow s \leq s'$ $\square$

Satz 3.3.19 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ absolut konvergent und

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} \tag{3.3.11}$$

Beweis. Satz 3.3.18 $\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_{\sigma(k)}| \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ absolut konvergent

$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = s'$

Zu zeigen: $\quad s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = s'$

$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad s'_{k_n} = \sum_{k=0}^{k_n} a_{\sigma(k)}$

k_n : kleinste Zahl mit

$\{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(k)\} \supset \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\Longrightarrow \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon, m \geq n \geq N(\varepsilon)$

$\Longrightarrow |s_n - s'_{k_n}| < \varepsilon, n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} (s_n - s'_{k_n}) = 0$

s_n, s'_{k_n} konvergent $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s'_{k_n} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ $\square$

D. Die Exponentialreihe

Satz 3.3.20 Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Exponentialreihe

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{3.3.12}$$

absolut konvergent.

Beweis. $\quad a_k := \frac{x^k}{k!}, x \neq 0, k \geq 2|x| \Longrightarrow$

$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{x^k}\right| = \frac{|x|}{k+1} < \frac{1}{2} \Longrightarrow$

$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < \frac{1}{2} \quad$ für fast alle $\quad k \overset{\text{Satz 3.3.13}}{\Longrightarrow}$ Beh. $\square$

Bemerkung 3.3.21 Beispiel 3.2.14, Formel (3.2.11), (3.3.11) $\Longrightarrow \exp(1) = e$.

Satz 3.3.22 Es gilt $\quad \exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x)$,

$$|R_{n+1}(x)| \leq 2\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad |x| \leq 1 + \frac{n}{2} \tag{3.3.13}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} |R_{n+1}(x)| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{|x|}{n+2} + \frac{|x|^2}{(n+2)(n+3)} + \dots\Big) \\ &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{|x|}{n+2} + \frac{|x|^2}{(n+2)^2} + \frac{|x|^3}{(n+2)^2} + \dots\Big) \end{aligned}$$

$|x| \leq 1 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(n+2) \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} |R_{n+1}(x)| &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\Big) \\ &\overset{\text{Beispiel 3.3.4,iii)}}{\leq} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\Big(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\Big) \end{aligned}$$

□

Satz 3.3.23 $\exp(x)$ genügt der Funktionalgleichung

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y). \tag{3.3.14}$$

Beweis. später! □

4 Stetigkeit

4.1 Definition und Beispiele

Def. 4.1.1 $a \in \mathbb{R}$ heißt <u>Berührpunkt</u> von $D \subset \mathbb{R}$, falls $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, a_n \in D$ existiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Def. 4.1.2 $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ Berührpunkt von D. Man schreibt

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$,
falls für jede Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in D$, mit
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$

ii) $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = c$,
falls für jede Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in D, x_n > a$,
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$

iii) $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = c$,
falls für jede Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in D, x_n < a$,
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$

iv) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$,
falls D nach oben unbeschränkt ist und für jede Folge $x_n \in D$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ gilt
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$

Beispiel 4.1.3 $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k, a_n = 1, \lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \infty$

$P(x) = x^n \underbrace{\left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + 1\right)}_{g(x)}$

$x \geq c := \max(1, 2n|a_0|, 2n|a_1|, \ldots, 2n|a_{n-1}|) \Longrightarrow$

$g(x) \geq \frac{1}{2} \Longrightarrow P(x) \geq \frac{1}{2}x^n \geq \frac{x}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Longrightarrow x_n \geq c, n \geq n_0 \Longrightarrow P(x_n) \geq \frac{x_n}{2} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P(x_n) = \infty$

Def. 4.1.4 $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, a \in D$. f heißt stetig im Punkt a, falls

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{4.1.1}$$

f heißt stetig in D, falls f in jedem Punkt von D stetig ist.

Beispiele 4.1.5

i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = c$ ist stetig in $\mathbb{R}$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} c = c = f(a)$

ii) $f(x) = \mathrm{id}(x) = x$ ist stetig in $\mathbb{R}$
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{id}(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = f(a)$

iii) $abs : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, x \longmapsto |x|$ ist stetig in $\mathbb{R}$

A) $a > 0, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \overset{\text{Satz 3.2.12}}{\Longrightarrow} x_n > 0, n \geq n_0 \Longrightarrow$
$\lim\limits_{n\to\infty} abs(x_n) = \lim_{n\to\infty} |x_n| = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = abs(a)$

B) $a < 0, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} abs(x_n)$
$= \lim\limits_{n\to\infty} (-x_n) \overset{\text{Korollar 3.2.11}}{=} (-1) \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -a = abs(a)$

C) $a = 0, \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \overset{\text{Aufgabe 18}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0 = abs(0)$

iv) Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in $\mathbb{R}$.
Zunächst:

$$\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1 \tag{4.1.2}$$

(3.3.13), $n = 0 \Longrightarrow |\exp(x) - 1| \leq 2|x|, |x| \leq 1$

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Longrightarrow |x_n| < 1, n \geq n_0$

$\Longrightarrow |\exp(x_n) - 1| \leq 2|x_n|, n \geq n_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = 1$

Sei jetzt $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n - a) = 0$

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a) = 1$

$\overset{3.3.14}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \lim_{n\to\infty} \exp(a)\exp(x_n - a) = \exp(a) \lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a) = \exp(a)$

Satz 4.1.6 $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in a, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind

$$\begin{aligned} f + g :& \quad D \longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda f :& \quad D \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \cdot g :& \quad D \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

stetig in a. Ist $g(a) \neq 0$, so ist auch

$$\frac{f}{g} : D' \longrightarrow \mathbb{R}, \quad D' := \{x \in D \,|\, g(x) \neq 0\}$$

stetig in a.

Beweis. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in D, \lim_{n\to\infty} x_n = a \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (f + g)(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \big(f(x_n) + g(x_n)\big) \\ &\overset{\text{Satz 3.2.11}}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) \\ &\overset{f,g \text{ stetig}}{=} f(a) + g(a) \\ &= (f + g)(a) \end{aligned}$$

Rest analog $\square$

Beispiele 4.1.7

i) $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ist stetig in $\mathbb{R}$
$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x \cdot x + a_3 x \cdot x \cdot x + \cdots$
$f(x) = a_0$ ist stetig
$f(x) = x$ ist stetig $\overset{\text{Satz 4.1.6}}{\Longrightarrow} a_1 x$ ist stetig $\overset{\text{Satz 4.1.6}}{\Longrightarrow} a_0 + a_1 x$ ist stetig usw.

ii) Jede rationale Funktion ist stetig (in ihrem Definitionsbereich).

Satz 4.1.8 $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ g : E \longrightarrow \mathbb{R},\ f(D) \subset E,$
f sei in $a \in D$ und g in $f(a)$ stetig $\Longrightarrow$

$$g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist stetig in a.

Beweis. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ x_n \in D,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Longrightarrow$
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a) \Longrightarrow$
$\lim\limits_{n\to\infty} (g \circ f)(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) \stackrel{g\,\text{stetig}}{=} g(f(a)) = (g \circ f)(a)$ □

Beispiel 4.1.9 $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Longrightarrow$
$|f| : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |f(x)|$ ist stetig
Beispiel 4.1.5 iii): *abs* ist stetig
$\stackrel{\text{Satz 4.1.8}}{\Longrightarrow} |f| = abs \circ f$ ist setig

4.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 4.2.1 (Zwischenwertsatz)

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $f(a) < 0, f(b) > 0$ (bzw. $f(a) > 0, f(b) < 0$)
$\Longrightarrow \exists\, p \in [a, b]$ mit $f(p) = 0$

Beweis. $f(a) < 0,\ f(b) > 0$

Konstruiere Folge $[a_n, b_n]$ mit

1) $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}], n \geq 1$

2) $b_n - a_n = 2^{-n}(b - a)$

3) $f(a_n) \leq 0, f(b_n) \geq 0$

vollständige Induktion

IA : $[a_0, b_0] := [a, b]$

IS : $n \longrightarrow n + 1$

$$m := \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{2 Fälle}$$

1. $f(m) \geq 0 \Longrightarrow [a_{n+1}, b_{n+1}] := [a_n, m]$

2. $f(m) < 0 \Longrightarrow [a_{n+1}, b_{n+1}] := [m, b_n]$

$\Longrightarrow$ 1) - 3) erfüllt!

$$\left.\begin{array}{ll} \{a_n\} & \text{monoton wachsend, beschränkt} \\ \{b_n\} & \text{monoton fallend, beschränkt} \end{array}\right\} \stackrel{\text{Satz 3.2.8}}{\Longrightarrow} \{a_n\}, \{b_n\} \text{ konvergent}$$

$\stackrel{2)}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n =: p$
f stetig $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(p)$

$f(a_n) \leq 0, f(b_n) \geq 0 \overset{\text{Satz 3.2.8}}{\Longrightarrow}$
$f(p) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(p) \Longrightarrow f(p) = 0$ $\square$

Korollar 4.2.2 Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $c \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann existiert $p \in [a,b]$ mit $f(p) = c$.

Beweis. Sei $f(a) < c < f(b)$

$$\begin{array}{cccc} g: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) - c \end{array}$$

g stetig, $g(a) < 0, g(b) > 0 \overset{\text{Satz 4.2.1}}{\Longrightarrow} \exists\, p \in [a,b]$
mit $g(p) = 0 \Longrightarrow f(p) = c$ $\square$

Def. 4.2.3

i) Die Mengen

$$\begin{array}{ll} [a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq a\} & (-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq a\} \\ (a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > a\} & (-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\} \end{array}$$

heißen uneigentliche Intervalle.

ii) Ein kompaktes Intervall ist ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Def. 4.2.4

i) Falls $D \subset \mathbb{R}$ nicht nach oben (unten) beschränkt ist, so schreibt man

$$\sup(D) = +\infty, \quad \inf(D) = -\infty. \tag{4.2.1}$$

ii) $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt beschränkt, falls $\exists\, K \in \mathbb{R}_+$ mit

$$|f(x)| \leq K \quad x \in D. \tag{4.2.2}$$

Satz 4.2.5 Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Longrightarrow \exists\, p, q \in [a,b]$ mit

$$f(p) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \tag{4.2.3}$$

$$f(q) = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} \tag{4.2.4}$$

Beweis. nur (4.2.3)
$A := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \quad (\in \mathbb{R} \cup \{\infty\})$
$\exists$ Folge $x_n \in [a,b]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ (vgl. Beweis von Satz 3.2.7 bzw. Satz 3.2.21)
$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\overset{\text{Satz 3.2.23}}{\Longrightarrow} \exists$ konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = p$
f stetig $\Longrightarrow f(p) = f(\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = A$ $\square$

Bem. 4.2.6 Satz 4.2.5 ist für nichtkompakte Intervalle falsch!

$f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x}$ Beispiele 4.1.7 $\Longrightarrow$

f ist stetig, <u>aber</u> unbeschränkt

$\mathrm{id}(0,1) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto x \Longrightarrow \sup\{\mathrm{id}(x), x \in (0,1)\} = 1$

Satz 4.2.7 ($\varepsilon - \delta$–Def.)

$f : \mathbb{R} \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in $p \in D$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \{y \in D \,|\, |y-p| < \delta\} : |f(x) - f(p)| < \varepsilon. \tag{4.2.5}$$

Beweis. „$\Longrightarrow$" $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in D, \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = p, \quad \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$

Annahme: (4.2.5) gelte <u>nicht</u>

$\Longrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D$ mit $|x-p| < \delta,\ |f(x) - f(p)| \geq \varepsilon$

$\Longrightarrow \exists x_n \in D$ mit $|x_n - p| < \frac{1}{n},\ |f(x_n) - f(p)| \geq \varepsilon$ (wähle ein $n > \frac{1}{\delta}$ hierzu)

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = p \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$ (Widerspruch)

„$\Longleftarrow$" $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = p \Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - p| < \delta,\ n \geq N$

$\overset{(4.2.5)}{\Longrightarrow} |f(x_n) - f(p)| < \varepsilon,\ n \geq N$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(p) \Longrightarrow f$ ist stetig $\square$

Satz 4.2.8 Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in $p \in D$, $f(p) \neq 0 \Longrightarrow f(x) \neq 0$ in $U_\delta(p)$, d. h.

$$\exists \delta > 0\ \forall x \in \{y \in D \,|\, |y-p| < \delta\} : f(x) \neq 0. \tag{4.2.6}$$

Beweis. $\varepsilon := |f(p)| > 0 \overset{\text{Satz 4.2.7}}{\Longrightarrow} \exists \delta > 0$ mit $|f(x) - f(p)| < \varepsilon,\ |x-p| < \delta$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow |f(x)| &= |f(x) - f(p) + f(p)| \\ &\geq |f(p)| - \underbrace{|f(x) - f(p)|}_{<\varepsilon} > \underbrace{|f(p)| - \varepsilon}_{=0} \end{aligned}$$

$\square$

Def 4.2.9 $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt <u>gleichmäßig</u> stetig in D, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ mit } |f(x) - f(x')| < \varepsilon\ \forall x, x' \in D \text{ mit } |x - x'| < \delta. \tag{4.2.7}$$

Bem. 4.2.10 stetig $\not\Longrightarrow$ gleichmäßig stetig!

$$\begin{aligned} f : \quad (0,1) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$|f(x) - f(x')| < 1, \; |x - x'| < \delta$

$\exists\, n$ mit $\left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n}\right| < \delta$, <u>aber</u>

$\left|f\Big(\dfrac{1}{n}\Big) - f\Big(\dfrac{1}{2n}\Big)\right| = |n - 2n| = n \geq 1$

Satz 4.2.11 $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Longrightarrow f$ ist gleichmäßig stetig

Beweis. Annahme: f <u>nicht</u> gleichmäßig stetig

$\Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ und Punkte $x_n, x'_n \in [a,b]$ mit

$|x_n - x'_n| < \dfrac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$

Satz 3.2.23 $\Longrightarrow \exists$ konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} =: p \in [a,b]$

$|x_n - x'_n| < \dfrac{1}{n} \Longrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k} = p \overset{f\,\text{stetig}}{\Longrightarrow}$

$\lim\limits_{k\to\infty} \big(f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})\big) = f(p) - f(p) = 0$ (Widerspruch)

$\square$

Satz 4.2.12 Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

i) $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x), \quad x \in [a,b]$

ii) $|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon, \qquad x \in [a,b]$

Beweis. Satz 4.2.11 $\Longrightarrow f$ ist gleichmäßig stetig

$\Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0$ mit $|f(x) - f(x')| < \varepsilon, \quad |x - x'| < \delta$

$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$

$t_k = a + k\dfrac{b-a}{n}, \quad \dfrac{b-a}{n} < \delta$

$\Longrightarrow t_k - t_{k-1} < \delta$

$c_k := \sup\{f(x) \,|\, t_{k-1} \leq x \leq t_k\}$

$c'_k := \inf\{f(x) \,|\, t_{k-1} \leq x \leq t_k\}$

Satz 4.2.5 $\Longrightarrow \exists\, \zeta, \zeta' \in [t_{k-1}, t_k]$ mit $c_k = f(\zeta), c'_k = f(\zeta')$

$\Longrightarrow |\zeta - \zeta'| < \delta \Longrightarrow |f(\zeta) - f(\zeta')| = |c_k - c'_k| < \varepsilon$

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(a), & x = a \\ c'_k, & t_{k-1} < x \leq t_k \end{cases} \qquad \psi(x) = \begin{cases} f(a), & x = a \\ c_k, & t_{k-1} < x \leq t_k \end{cases}$$

$\square$

Satz 4.2.13 Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Longrightarrow f(I) \subset \mathbb{R}$ ist Intervall.

Beweis.
$$\begin{aligned} B &:= \sup f(I) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ A &:= \inf f(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \end{aligned}$$

wir zeigen: $(A, B) \subset f(I)$

sei $A < y < B \Longrightarrow \exists\, a, b \in I$ mit $f(a) < y < f(b)$

$\overset{\text{Korollar 4.2.2}}{\Longrightarrow} \exists\, x \in I$ mit $f(x) = y \Longrightarrow y \in f(I)$

$\Longrightarrow f(I) \in \{(A, B), [A, B], [A, B), (A, B]\}$

□

Def. 4.2.14

i) Sei $f : M \longrightarrow N$ injektiv. Die <u>Umkehrabbildung</u> $f^{-1} : f(M) \longrightarrow M$ ist durch
$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x) \tag{4.2.8}$$
definiert.

ii) Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktion. f heißt
$$\begin{pmatrix} \text{monoton wachsend} \\ \text{streng monoton wachsend} \\ \text{monoton fallend} \\ \text{streng monoton fallend} \end{pmatrix}, \quad \text{falls} \quad \begin{pmatrix} f(x) \le f(x') \\ f(x) < f(x') \\ f(x) \ge f(x') \\ f(x) > f(x') \end{pmatrix} \tag{4.2.9}$$
$\forall\, x, x' \in D$ mit $x < x'$

Satz 4.2.15 $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, injektiv
$\Longrightarrow f$ ist streng monoton wachsend (fallend)

Beweis. O.B.d.A. sei $f(a) < f(b)$. Wir zeigen, dass f streng monoton wachsend ist.

Zunächst ist

$f(a) = \min\{f(x) | x \in [a, b]\}$

$f(b) = \max\{f(x) | x \in [a, b]\}$,

denn angenommen $f(c) = \min\{f(x), x \in [a, b]\}$ für ein $c \in (a, b)$

$\overset{\text{Korollar 4.2.2}}{\Longrightarrow} \exists\, c' \in [c, b]$ mit $f(c') = f(a)$ (Widerspruch zu f injektiv)

Annahme: f <u>nicht</u> streng monoton wachsend

$\Longrightarrow \exists\, x_1, x_2 \in [a, b],\ x_1 < x_2,\ f(x_1) \ge f(x_2)$

$\Longrightarrow f(a) \le f(x_2) \le f(x_1) \overset{\text{Korollar 4.2.2}}{\Longrightarrow} \exists\, z \in [a, x_1]$ mit $f(z) = f(x_2)$
(Widerspruch zu f injektiv) □

Frage: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, injektiv $\Longrightarrow f^{-1}$ stetig?

Antwort: nein!

Beispiel 4.2.16 $D : [-2,-1) \cup [1,2]$

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x+1\,, & \text{falls } \ -2 \le x < -1 \\ x-1\,, & \text{falls } \quad 1 \le x \le 2 \end{cases} \end{aligned}$$

f stetig, streng monoton $\Longrightarrow f$ injektiv $\Longrightarrow f^{-1}$ existiert

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1\,, & -1 \le x < 0 \\ x+1\,, & \ \ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

f^{-1} unstetig!
Aber:

Satz 4.2.17 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton (wachsend oder fallend)
$\Longrightarrow f^{-1} : f(I) = I' \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton (wachsend oder fallend)

Beweis. f streng monoton wachsend

$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$\Longrightarrow f^{-1}$ streng monoton wachsend

Satz 4.2.13 $\Longrightarrow f(I)$ ist Intervall

$\eta \in f(I), \quad \eta = f(\xi), \quad \xi = f^{-1}(\eta) \in I$

Annahme: ξ <u>kein</u> Randpunkt $\Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ mit $[\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon] \subset I$

$\overset{f \text{ streng monoton}}{\Longrightarrow} f(\xi - \varepsilon) < \eta < f(\xi + \varepsilon) \Longrightarrow \exists\, \delta > 0$ mit

$\Longrightarrow f(\xi - \varepsilon) < y < f(\xi + \varepsilon) \quad \forall\, y \in U_\delta(\eta) \cap f(I)$

$\overset{f^{-1}\text{streng monoton}}{\Longrightarrow} \xi - \varepsilon < f^{-1}(y) < \xi + \varepsilon \Longrightarrow |f^{-1}(y) - \xi| < \varepsilon$

$\Longrightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)| < \varepsilon, \quad y \in U_\delta(\eta)$

$\overset{\text{Satz 4.2.7}}{\Longrightarrow} f^{-1}$ stetig in η!

η Randpunkt: analog mit $[\xi, \xi + \varepsilon]$ bzw. $[\xi - \varepsilon, \xi]$

streng monoton fallend analog $\square$

5 Differentiation

5.1 Grundbegriffe

A. Definition und Beispiele

Def. 5.1.1 Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. f heißt in $x \in D$ <u>differenzierbar</u>, falls

$$f'(x) := \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in D \setminus \{x\}}} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \tag{5.1.1}$$

existiert. $f'(x)$ heißt <u>Differentialquotient</u> oder <u>Ableitung</u> von f in x. f heißt <u>differenzierbar in D</u>, falls f in jedem Punkt $x \in D$ differenzierbar ist.

Bemerkungen 5.1.2

i) $h = \xi - x \Longrightarrow \xi = x + h \Longrightarrow$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{5.1.2}$$

ii) Es muss $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \xi_n \in D \setminus \{x\}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} \xi_n = x$ existieren!

iii) <u>Differenzenquotient</u> $\dfrac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$ ist Steigung der <u>Sekante</u> durch $(x, f(x)), (\xi, f(\xi))$

$\xi \longrightarrow x \Longrightarrow$ (Sekante $\longrightarrow$ Tangente)

$\Longrightarrow f'(x) =$ Steigung der Tangente in x

iv) Schreibweisen

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}, \quad \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \tag{5.1.3}$$

v) f heißt in x <u>von rechts differenzierbar</u>, falls

$$f'_+(x) = \lim_{\xi \searrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \tag{5.1.4}$$

existiert. $f'_-(x)$ bzw. <u>Differenzierbarkeit von links</u> analog.

Beispiele 5.1.3

i) $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto c \end{aligned}$

$f'(x) = \lim\limits_{\xi \to x} \dfrac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \lim\limits_{\xi \to x} \dfrac{c - c}{\xi - x} = 0$

ii) $f(x) = c \cdot x$

$f'(x) = \lim\limits_{\xi \to x} \dfrac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \lim\limits_{\xi \to x} \dfrac{c\xi - cx}{\xi - x} = c$

iii) $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{n}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

iv) $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, vgl. 3.3, D

$$\begin{aligned} \exp'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} \\ &\overset{(3.3.14)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x)\exp(h) - \exp(x)}{h} \\ &= \exp(x) \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} \end{aligned}$$

Satz 3.3.22 $\Longrightarrow$

$$|\exp(h) - (1+h)| \le |h|^2, \quad |h| \le \frac{3}{2}$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{\exp(h) - 1}{h} - 1\right| = \left|\frac{\exp(h) - (1+h)}{h}\right| \le |h|$$

$$\Longrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1 \Longrightarrow \exp'(x) = \exp(x) \text{ !}$$

v) $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{h}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

vi) $abs : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist <u>nicht</u> differenzierbar in 0 !

$$h_n = (-1)^n \frac{1}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} h_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{abs(0 + h_n) - abs(0)}{h_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{h} - 0}{(-1)^n \frac{1}{h}} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

es gilt aber:

$$abs_+(0) = 1, \quad abs_-(0) = -1$$

B. Approximationseigenschaften

Def. 5.1.4 (Landau-Symbole $o, \mathcal{O}$)

i) Seien $f, g : (a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = o(g(x)),\ x \to \infty$, falls

$\forall \varepsilon > 0\ \exists R > a$ mit $|f(x)| \le \varepsilon |g(x)|$ für $x \ge R$

$\Big($Für $g(x) \neq 0,\ x \ge R$ ist $f(x) = o(g(x)),\ x \to \infty$ äquivalent zu $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ $\Big)$

$f(x) = \mathcal{O}(g(x)),\ x \to \infty$, falls

$K \in \mathbb{R}_+, R > a$ existieren mit $|f(x)| \leq K|g(x)|$ für $x \geq R$

ii) $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}, x_0$ Berührpunkt

$f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0$, falls

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ mit $|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|, x \in D, |x - x_0| < \delta$

$f(x) = O(g(x))$ analog

iii) $f_1(x) = f_2(x) + \mathcal{O}(g(x)) \Longleftrightarrow f_1(x) - f_2(x) = \mathcal{O}(g(x))$

Beispiele 5.1.5

i) $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \Longrightarrow P(x) = \mathcal{O}(x^n)$

$$\begin{aligned} x \geq R > 1 \quad \Longrightarrow \quad |P(x)| &\leq |a_0| + |a_1||x| + \ldots + |a_n||x|^n \\ &\leq |a_0||x|^n + |a_1||x|^n + \ldots + |a_n||x|^n \\ &= (|a_0| + \ldots + |a_n|)|x|^n \end{aligned}$$

ii) $e^x = 1 + x + \mathcal{O}(x^2),\ x \to 0$ (Übung)

iii) $f(x) = f(x_0) + o(1),\ x \to x_0 \Longrightarrow f$ stetig in x_0 (Übung)

Satz 5.1.6 $\mathbb{R} \supset D \ni a$ mit $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \xi_n \in D, \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = a$. Dann ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann differenzierbar in a, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$f(x) = f(a) + c(x - a) + \varphi(x) \tag{5.1.5}$$

und

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq 0}} \frac{\varphi(x)}{x - a} = 0. \tag{5.1.6}$$

Dann gilt $c = f'(a)$.

Bemerkung 5.1.7 Satz 5.1.6 bedeutet:

f differenzierbar $\Longleftrightarrow f$ durch affin-lineare Funktion approximierbar

$L(x) := f(a) + c(x - a) = f(a) + f'(a)(x - a) \widehat{=}$ Tangente

$f(x) - L(x) = \varphi(x) \overset{(5.1.6)}{\Longrightarrow} \varphi(x) = o(|x - a|)$!

Beweis von Satz 5.1.6

„$\Longrightarrow$“ $c := f'(a),\quad \varphi(x) := f(x) - f(a) - c(x - a)$

$$\Longrightarrow \frac{\varphi(x)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - c$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - c = f'(a) - c = 0$$

„$\Longleftarrow$“ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(a)+c(x-a)+\varphi(x)-f(a)}{(x-a)}$

$$=\lim_{x\to 0}\Big(\frac{c(x-a)}{(x-a)}+\frac{\varphi(x)}{x-a}\Big)=c+\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{x-a}=c$$

□

Korollar 5.1.8 Ist $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ in a differenzierbar, so ist f in a stetig.

Beweis. Übungen

5.2 Ableitungsregeln

Satz 5.2.1 Seien $f,g:D\longrightarrow\mathbb{R}$ diffb., $\lambda\in\mathbb{R}\Longrightarrow$
$f+g,\lambda f,f\cdot g:D\longrightarrow\mathbb{R}$ sind diffb. und

$$(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x) \tag{5.2.1}$$

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x) \tag{5.2.2}$$

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \quad \text{Produktregel} \tag{5.2.3}$$

Ist $\forall\xi\in D, g(\xi)\neq 0\Longrightarrow \dfrac{f}{g}:D\longrightarrow\mathbb{R}$ ist diffb. und

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad \text{Quotientenregel} \tag{5.2.4}$$

Beweis (5.2.2)

$$\begin{aligned}(\lambda f)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\lambda f(x+h)-\lambda f(x)}{h}\\ &\overset{\text{Korollar 3.2.13}}{=} \lambda\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lambda f'(x)\end{aligned}$$

(5.2.1) analog

(5.2.3) $(f\cdot g)'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)[g(x+h)-g(x)]+[f(x+h)-f(x)]g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)[g(x+h)-g(x)]}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]g(x)}{h}$$

$$\overset{\text{Korollar 5.1.8}}{=} f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$$

(5.2.4) zunächst $f=1$

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{1}{g}\Big)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\Big)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\Big(\frac{g(x)-g(x+h)}{h}\Big)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\lim_{h\to 0}\Big(\frac{g(x)-g(x+h)}{h}\Big)\\
&= \frac{-g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}$$

Für allgemeines f gilt dann

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{f}{g}\Big)'(x) &= \Big(f\cdot\frac{1}{g}\Big)'(x) \overset{(5.2.3)}{=} f'(x)\frac{1}{g(x)}+f(x)\frac{-g'(x)}{g^2(x)}\\
&= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}$$

□

Satz 5.2.2 (Kettenregel) $f: D \longrightarrow \mathbb{R}, g: E \longrightarrow \mathbb{R}, f(D) \subset E$. Sei f in $x \in D$ und g in $y = f(x)$ diffb.
$\Longrightarrow g\circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ is diffb. in x und

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x). \tag{5.2.5}$$

Beweis.

$$g^*(\eta) = \begin{cases} \dfrac{g(\eta)-g(y)}{\eta - y} & \eta \neq y\\ g'(y) & \eta = y\end{cases}$$

$\lim_{\eta\to y} g^*(\eta) = g^*(y) = g'(y), \quad g(\eta)-g(y) = g^*(\eta)(\eta - y)$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow (g\circ f)'(x) &= \lim_{\xi\to x}\frac{g(f(\xi))-g(f(x))}{\xi - x}\\
&= \lim_{\xi\to x}\frac{g^*(f(\xi))(f(\xi)-f(x))}{\xi - x}\\
&= \lim_{\xi\to x} g^*(f(\xi))\lim_{\xi\to x}\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x}\\
&= g'(f(x))f'(x)
\end{aligned}$$

□

Beispiele 5.2.3

i) $f_n(x) = x^n \qquad f_n'(x) = nx^{n-1}$

vollständige Induktion

IA : $n = 0, 1, 2$ Bsp. 5.1.3

IS : $n \longrightarrow n+1$

$f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x\cdot x^n = f_1\cdot f_n \overset{(5.2.3)}{\Longrightarrow}$

$$\begin{aligned} f'_{n+1}(x) &= f'_1 f_n + f'_n f_1 \\ &\overset{(IV)}{=} 1 \cdot x^n + n x^{n-1} \cdot x \\ &= x^n + n x^n = (1+n)x^n \end{aligned}$$

ii) $$\begin{aligned} f : \mathbb{R}\backslash\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x^n} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \Big(\frac{1}{x^n}\Big)' \overset{(5.2.4)}{=} \frac{-nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -nx^{-n-1}$$

iii) $$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x}\exp(x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &\overset{(5.2.3)}{=} (\sqrt{x})' \exp(x^2) + \sqrt{x}\exp(x^2)' \\ &\overset{\text{Bsp. 5.1.3 v)}}{=} \frac{1}{2\sqrt{x}} \exp(x^2) + \sqrt{x}\exp(x^2)' \\ &\overset{\text{Satz 5.2.2}}{=} \frac{1}{2\sqrt{x}} \exp(x^2) + \sqrt{x}\exp'(x^2)(x^2)' \\ &\overset{\text{Bsp. 5.1.3}}{=} \frac{1}{2\sqrt{x}} \exp(x^2) + \sqrt{x}\exp(x^2)2x \\ &= \Big(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x^{3/2}\Big)\exp(x^2) \end{aligned}$$

iv) $F(x) := f(ax+b), \quad a, b \in \mathbb{R}$

$$F'(x) \overset{\text{Satz 5.2.2}}{=} f'(ax+b) \cdot a$$

Satz 5.2.4 (Ableitung der Umkehrfunktion)

Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, streng monoton, $f^{-1} : f(I) = I' \longrightarrow \mathbb{R}$. Ist f in $x \in I$ diffb., $f'(x) \neq 0$, so ist f^{-1} in $y = f(x)$ diffb. und

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}. \tag{5.2.6}$$

Beweis. Satz 4.2.13 $\Longrightarrow f(I) = I'$ Intervall $\Longrightarrow \exists\, \zeta_n \in I'\backslash\{y\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = y$.

Satz 4.2.17 $\Longrightarrow f^{-1}$ ist stetig, $\eta_n := f^{-1}(\zeta_n) \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = \lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(\zeta_n) = f^{-1}(y)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(\zeta_n) - f^{-1}(y)}{\zeta_n - y} = \lim_{n\to\infty} \frac{\eta_n - x}{f(\eta_n) - f(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{f(\eta_n)-f(x)}{\eta_n - x}} = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\Longrightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$ □

Def. 5.2.5

i) $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei in D diffb. Falls $f' : D \longrightarrow \mathbb{R}$ wieder in $x \in D$ diffb. ist, so heißt

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} := f''(x) := (f')'(x) \tag{5.2.7}$$

zweite Ableitung von f in x.

ii) $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt k-mal diffb. in $x \in D$, falls

$$f|_{D\cap(x-\varepsilon,x+\varepsilon)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$(k-1)$-mal diffb. ist und die $(k-1)$-te Ableitung in x diffb. ist. Man schreibt

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &:= \frac{d^k f(x)}{dx^k} := \left(\frac{d}{dx}\right)^k f(x) \\ &:= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{k-1} f(x)}{dx^{k-1}}\right) \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

iii) f heißt k-mal diffb. in D, falls f in jedem $x \in D$ k-mal diffb. ist.
f heißt k-mal stetig diffb. in D, wenn $f^{(k)} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ in D stetig ist.

5.3 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

A. Extrema

Def. 5.3.1 $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$. f hat in $x \in (a,b)$ ein lokales Maximum (Minimum), falls $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$f(x) \geq f(\xi) \quad (f(x) \leq f(\xi)) \text{ für alle } \xi \text{ mit } |x - \xi| < \varepsilon. \tag{5.3.1}$$

Satz 5.3.2 $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ besitze in $x \in (a,b)$ lokales Extremum und sei diffb. in x. Dann gilt $f'(x) = 0$.

Beweis. Sei x lokales Maximum

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad f(\xi) &\leq f(x),\ \xi \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \\ \Longrightarrow \quad f'_+(x) &= \lim_{\xi \searrow x} \frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x} \leq 0 \\ f'_-(x) &= \lim_{\xi \nearrow x} \frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x} \geq 0 \end{aligned}$$

f diffb. $\Longrightarrow f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x) = 0$

(Minimum analog) □

Bemerkung 5.3.3

i) $f'(x) = 0$ ist notwendig, aber nicht hinreichend!

ii) $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig $\overset{\text{Satz}}{\Longrightarrow}$ f nimmt Max., Min. an. Extremum am Rand $\not\Longrightarrow$ $f'(x) = 0$!

Satz 5.3.4 (Rolle) $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $f(a) = f(b)$, f in (a,b) diffb. $\Longrightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis. f <u>nicht</u> konstant $\Longrightarrow \exists\, x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) > f(a)$ oder $f(x) < f(a)$.
$\Longrightarrow f$ nimmt Maximum (Minimum) in $\xi \in (a,b)$ an $\overset{\text{Satz 5.3.2}}{\Longrightarrow} f'(\xi) = 0$ □

Korollar 5.3.5 (Mittelwertsatz) $a < b, f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, in (a,b) diffb.
$\Longrightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \tag{5.3.2}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} F:\ & [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \\ & F(x) = f(x) - \frac{(f(b) - f(a))}{b - a}(x - a) \end{aligned}$$

F stetig, diffb. in $(a,b), F(a) = f(a) = F(b)$

$\overset{\text{Satz 5.3.4}}{\Longrightarrow} \exists\, \xi \in (a,b)$ mit $F'(\xi) = 0 \Longrightarrow 0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{(f(b) - f(a))}{b - a}$ □

Korollar 5.3.6 $f; [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, in (a,b) diffb. und es gelte

$$\forall\, \xi \in (a,b) : m \leq f'(\xi) \leq M$$

Dann gilt

$$m(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y - x),\ x \leq y,\ x, y \in (a,b)$$

Beweis. Korollar 5.3.5, $a = x, b = y$

$\Longrightarrow \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi)$

$\Longrightarrow m(y - x) \leq f'(\xi)(y - x) = f(y) - f(x) \leq M(y - x)$ □

Korollar 5.3.7 Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, in (a,b) diffb. und $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist f konstant.

Beweis. Korollar 5.3.6 $\Longrightarrow 0 \leq f(y) - f(x) \leq 0 \Longrightarrow f(x) = f(y)$ □

B. Monotonie

Satz 5.3.8 Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) diffb.

i) Gilt $f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) > 0, f'(x) \leq 0, f(x) < 0)$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f monoton wachsend (bzw. streng monoton wachsend, monoton fallend, streng monoton fallend).

ii) Ist f monoton wachsend (fallend), so folgt $f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0)$ für alle $x \in (a,b)$.

Beweis.

i) $f'(x) > 0, x \in (a,b)$

Annahme: f <u>nicht</u> streng monoton wachsend

$\Longrightarrow \exists\, x_1, x_2 \in [a,b],\ x_1 < x_2,\ f(x_1) \geq f(x_2)$

$\overset{\text{Korollar 5.3.5}}{\Longrightarrow} \exists\, \xi \in (x_1, x_2)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$$

ii) f monoton wachsend

$$\Longrightarrow \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \geq 0\,, \quad \xi > x$$

$\Longrightarrow f'(x) \geq 0$

$\square$

Bemerkung 5.3.9 f streng monoton wachsend $\not\Longrightarrow f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in (x_1, x_2)$,
Beispiel: $f(x) = x^3\,!$

Satz 5.3.10 $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ diffb., in $x \in (a,b)$ zweimal diffb. und

$$f'(x) = 0\,,\ f''(x) > 0 \quad (\text{bzw. } f''(x) < 0)$$

$\Longrightarrow x$ ist strenges lokales Minimum (bzw. Maximum).

Beweis. Sei o.B.d.A. $f''(x) > 0$ und

$f''(x) = \lim\limits_{\xi \to x} \dfrac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} > 0.$

$\Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ mit $\dfrac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} > 0$ für alle ξ mit $|\xi - x| < \varepsilon$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow$

$f'(\xi) < 0\,, \quad x - \varepsilon < \xi < x$

$f'(\xi) > 0\,, \quad x < \xi < x + \varepsilon$

$\overset{\text{Satz 5.3.8}}{\Longrightarrow}$ f streng monoton fallend in $(x - \varepsilon, x)$
f streng monoton wachsend in $(x, x + \varepsilon)$

$\Longrightarrow f$ besitzt strenges Minimum in x $\square$

C. Die Regel von l'Hospital

Lemma 5.3.11

i) $f : (0,a) \longrightarrow \mathbb{R}$ diffb., $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \searrow 0} f'(x) =: c \ \in \mathbb{R}$

Dann gilt $\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{f(x)}{x} = c.$

ii) $f : (a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ diffb., $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) =: c \ \in \mathbb{R}$.

Dann gilt $\quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = c.$

Beweis.

i) Übungen

ii) zunächst $c = 0$

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0 \Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x_0 > \max(a, 0) \text{ mit } |f'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,,\ x \geq x_0$$

$$\overset{\text{Korollar 5.3.6}}{\Longrightarrow} |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}(x - x_0), \quad x \geq x_0$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \left|\frac{f(x)}{x}\right| &= \frac{|f(x) - f(x_0) + f(x)|}{x} \\ &\leq \frac{|f(x) - f(x_0)|}{x} + \frac{|f(x_0)|}{x} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\frac{(x - x_0)}{x} + \frac{|f(x_0)|}{x} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon, \quad x \geq \max\left\{x_0, \frac{2|f(x_0)|}{\varepsilon}\right\} \end{aligned}$$

allgemein: $\quad g(x) := f(x) - cx$

□

Satz 5.3.12 $f, g : I = (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ diffb., $g'(x) \neq 0\ \forall\, x \in I$ und es existiere $\lim\limits_{x\nearrow b} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} =: c$. Dann gilt

i) Falls $\lim\limits_{x\nearrow b} g(x) = \lim\limits_{x\nearrow b} f(x) = 0$, so ist $g(x) \neq 0$ für $x \geq x_0$, $a < x_0 < b$ und es gilt

$$\lim_{x\nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

ii) Falls $\lim\limits_{x\nearrow b} g(x) = \pm\infty$, so ist $g(x) \neq 0\ \forall\, x \in I$ und

$$\lim_{x\nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Beweis.

i) Übungen

ii) Satz 5.3.4 $\Longrightarrow$ g ist injektiv

$\Longrightarrow$ g ist streng monoton, g' wechselt (nicht) Vorzeichen

Annahme: g streng monoton wachsend

$\Longrightarrow g(I) = J = (A, \infty), \quad A := \lim\limits_{x \searrow a} g(x)$

$\psi := g^{-1} : J \longrightarrow I$

$F := f \circ \psi : J \longrightarrow \mathbb{R}$

$F'(y) = (f \circ \psi)'(y) \overset{\text{Satz 5.2.2}}{=} f'(\psi(y))\psi'(y) \overset{\text{Satz 5.2.4}}{=} \dfrac{f'(\psi(y))}{g'(\psi(y))} \Longrightarrow$

$\lim\limits_{y \to \infty} F'(y) = \lim\limits_{x \nearrow b} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = c$

$\overset{\text{Lemma 5.3.11}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{y \to \infty} \dfrac{F(y)}{y} = c$

$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset I\,, \ \lim\limits_{n \to \infty} x_n = b$

$y_n := g(x_n) \Longrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} y_n = \infty$ und

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{F(y_n)}{y_n} = c$

$\square$

6 Einige spezielle Funktionen

6.1 Nochmals Exponentialreihe

Satz 6.1.1 (Cauchy-Produkt)

Seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent und

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0. \tag{6.1.1}$$

Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big). \tag{6.1.2}$$

Beweis.

$c_n = \sum\limits_{\substack{k+\ell=n \\ k,\ell \geq 0}} a_k b_\ell$

$\Longrightarrow \ C_N := \sum\limits_{n=0}^{N} c_n = \sum\limits_{(k,\ell) \in \Delta_N} a_k b_\ell$

$$\Delta_N := \{(k,\ell) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid k+\ell \le N\}$$

$$A_N := \sum_{n=0}^{N} a_n, \quad B_N := \sum_{n=0}^{N} b_n$$

$$\Longrightarrow \quad A_N \cdot B_N = \sum_{k,\ell\le N} a_k b_\ell = \sum_{(k,\ell)\in Q_N} a_k b_\ell$$

$$\Delta_N \subset Q_N \implies A_N B_N - C_N = \sum_{(k,\ell)\in Q_N\setminus\Delta_N} a_k b_\ell$$

$$A_N^* := \sum_{n=0}^{N} |a_n|, \quad B_N^* := \sum_{n=0}^{N} |b_n|$$

$$\Longrightarrow \quad A_N^* B_N^* = \sum_{(k,\ell)\in Q_N} |a_k||b_\ell|$$

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor &:= \quad \text{größte ganze Zahl} \quad \le x \\ \lceil x \rceil &:= \quad \text{kleinste ganze Zahl} \quad \ge x \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

$$Q_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \subset \Delta_N \Longrightarrow Q_N\setminus\Delta_N \subset Q_N \setminus Q_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \ |A_N B_N - C_N| \ &\le \sum_{(k,\ell)\in Q_N\setminus Q_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}} |a_k||b_\ell| \\ &= \ A_N^* B_N^* - A_N^* - A^*_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} B^*_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ absolut konvergent} \Longrightarrow A_N^* B_N^* \text{ konvergent} \Longrightarrow A_N^* B_N^* \text{ Cauchy-Folge}$$

$$\Longrightarrow \lim_{N\to\infty} |A_N B_N - C_N| \le \lim_{N\to\infty} \left(A_N^* B_N^* - A^*_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} B^*_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{N\to\infty} A_N B_N = \big(\lim_{N\to\infty} A_N\big)\big(\lim_{N\to\infty} B_N\big) = \lim_{N\to\infty} C_N$$

$\Longrightarrow$ (6.1.2)

$$|c_n| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}| \Longrightarrow \text{absolute Konvergenz}$$ □

Jetzt können wir den Beweis von Satz 3.3.23 nachliefern:

Satz 3.3.23 $\exp(x)$ genügt der Funktionalgleichung

$$\forall x,y \in \mathbb{R} : \exp(x{+}y) = \exp(x)\exp(y). \tag{3.3.13}$$

Beweis. Satz 3.3.20 $\Longrightarrow \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\ , \ \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$

$$\overset{\text{Satz 6.1.1}}{\Longrightarrow} \exp(x)\cdot\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \overset{(2.3.4)}{=} \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k y^{n-k} \overset{(2.3.6)}{=} \frac{1}{n!}(x+y)^n, \text{ also } \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \exp(x+y).$$

□

Satz 6.1.2 Es gilt

i) $\exp(x) > 0$

ii) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

iii) $\exp(n) = e^n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Beweis.

ii) (3.3.13) $\Longrightarrow$

$\exp(x)\exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1 \Longrightarrow$

$\exp(x) \neq 0,\ \exp(-x) = \exp(x)^{-1}$

i) $x \geq 0 \Longrightarrow$

$\exp(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \ldots \geq 1 > 0$

$x < 0 \Longrightarrow -x > 0 \Longrightarrow \exp(-x) > 0 \Longrightarrow \exp(x) = \exp(-x)^{-1} > 0$

iii) vollständige Induktion

IA : $\quad \exp(0) = 1 = e^0$

IS : $\quad n \longrightarrow n+1$

$$\begin{aligned} \exp(n+1) &= \exp(n)\exp(1) \\ &\overset{\text{(IV)}}{=} e^n \exp(1) \overset{(3.2.11)}{=} e^n \cdot e^1 = e^{n+1} \end{aligned}$$

also: $\quad \exp(n) = e^n, \quad n \geq 0$

aber: $\quad \exp(-n) = \dfrac{1}{\exp(n)} = \dfrac{1}{e^n} = e^{-n}$ $\square$

Wegen Satz 6.1.2 iii) schreibt man auch

$$\exp(x) = e^x.$$

6.2 Logarithmus und allgemeine Potenz

Satz 6.2.1 $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+$ ab. Die Umkehrabbildung

$$\log : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist stetig, streng monoton wachsend, und heißt <u>natürlicher Logarithmus</u>. Es gilt

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y). \tag{6.2.1}$$

Wir schreiben $\log x := \log(x)$ für $x \in \mathbb{R}_+$.

Beweis.

i) exp ist streng monoton

$$\exp(\xi) = 1 + \xi + \frac{\xi^2}{2} + \ldots > 1, \quad \xi > 1$$

$$x < x' \Longrightarrow \xi := x' - x > 0 \Longrightarrow \exp(\xi) > 1 \Longrightarrow$$

$$\exp(x') = \exp(x + \xi) = \exp(x) \cdot \exp(\xi) > \exp(x)$$

ii) exp bijektiv etc.

$$\exp(n) \geq 1 + n, \ \exp(-n) = \exp(n)^{-1} \leq \frac{1}{1+n} \Longrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \exp(n) = \infty, \ \lim_{n\to\infty} \exp(-n) = 0 \Longrightarrow \exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$$

exp stetig, streng monoton wachsend

$\stackrel{\text{Satz 4.2.17}}{\Longrightarrow} \log : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend

iii) Funktionalgleichung (6.2.1)

$$\xi := \log x, \ \eta := \log y \Longrightarrow \exp(\xi) = x, \ \exp(\eta) = y$$

$$\Longrightarrow \exp(\xi + \eta) = \exp(\xi) \cdot \exp(\eta) = x \cdot y \Longrightarrow$$

$$\log(x \cdot y) = \log(\exp(\xi + \eta)) = \xi + \eta = \log x + \log y$$

□

Def. 6.2.2 Die Exponentialfunktion zur Basis a, $\exp_a, a > 0$ ist definiert durch

$$\exp_a(x) := \exp(x \log a). \tag{6.2.2}$$

Satz 6.2.3 $\exp_a$ ist stetig und es gilt

i) $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \exp_a(y), \quad x, y \in \mathbb{R}$

ii) $\exp_a(n) = a^n, \quad n \in \mathbb{Z}$

iii) $\exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p}, \quad p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N}, \ q \geq 2$

Beweis. $\exp_a(x) = (\exp \circ g)(x), \ g(x) = x \cdot \log a$

$\exp, g$ stetig $\stackrel{\text{Satz 4.1.8}}{\Longrightarrow} \exp \circ g$ ist stetig

i)
$$\begin{aligned} \exp_a(x + y) &= \exp((x + y) \log a) \\ &= \exp(x \log a + a \log a) \\ &= \exp(x \log a) \exp(y \log a) \\ &= \exp_a(x) \exp_a(y) \end{aligned}$$

$$\left(\Longrightarrow \exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)} \right)$$

ii) vollständige Induktion $\Longrightarrow \exp_a(nx) = (\exp_a(x))^n$

$\exp_a(1) = \exp\log a = a,\ \exp_a(-1) = \dfrac{1}{a} \Longrightarrow$

$\exp_a(n) = a^n,\ \exp_a(-n) = a^{-n}$

iii) $a^p = \exp_a(p) = \exp_a\left(q\dfrac{p}{q}\right) = \left(\exp_a\left(\dfrac{p}{q}\right)\right)^q$

$\Longrightarrow \sqrt[q]{a^p} = \exp_a\left(\dfrac{p}{q}\right)$ $\square$

Schreibweise:

$$a^x := \exp_a(x) = \exp(x\log a) \tag{6.2.3}$$

$\big(\log e = 1 \Longrightarrow e^x = \exp(x) = \exp_e(x)\big)$

Satz 6.2.4 Für $a, b \in \mathbb{R}_+,\ x, y \in \mathbb{R}$ gilt

i) $a^x a^y = a^{x+y}$

ii) $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$

iii) $a^x b^x = (ab)^x$

iv) $\left(\dfrac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$

Beweis.

ii)
$$\begin{aligned} a^x &= \exp(x\log a) \\ \Longrightarrow \log a^x &= x\log a \\ \Longrightarrow (a^x)^y &= \exp(y\log a^x) = \exp(x\cdot y\log a) \\ &= \exp_a(x\cdot y) = a^{x\cdot y} \end{aligned}$$

i), iii) iv) Übungen $\square$

Satz 6.2.5 Es gilt

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^k} = \infty, \quad k \in \mathbb{N}$

ii) $\lim\limits_{x\to\infty} x^k e^{-x} = 0, \quad \lim\limits_{x\searrow 0} x^k e^{1/x} = \infty$

iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \log x = \infty, \quad \lim\limits_{x\searrow 0} \log x = -\infty$

iv) $\lim\limits_{x\searrow 0} x^\alpha = 0, \quad \lim\limits_{x\searrow 0} x^{-\alpha} = \infty$

Beweis.

i) Es gilt

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}, \quad x > 0$$

$$\Longrightarrow \frac{e^x}{x^k} > \frac{x}{(k+1)!}$$

ii) Übungen

iii) $k \in \mathbb{R}$ beliebig. Satz 6.2.1 $\Longrightarrow$ log streng monoton wachsend

$$x > e^k \Longrightarrow \log x > \log e^k = k \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} \log x = \infty$$

$$\lim_{x\searrow 0} \log(x) = \lim_{y\to\infty} \log \frac{1}{y} = -\lim_{y\to\infty} \log y = -\infty$$

iv) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Folge, $x_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

iii) $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \alpha \log x_n = -\infty$

i) $\Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} e^y = 0 \Longrightarrow$

$\lim_{n\to\infty} x_n^\alpha = \lim_{n\to\infty} \exp(\alpha \log x_n) = 0 \Longrightarrow$

$\lim_{x\searrow 0} x^\alpha = 0$

$x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} \Longrightarrow \lim_{x\searrow 0} x^{-\alpha} = \infty$ □

6.3 Exponentialfunktion im Komplexen

A. Komplexe Zahlen

Satz 6.3.1 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bildet mit

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

einen Körper $\mathbb{C}$, den Körper der komplexen Zahlen. Nullelement ist $(0,0)$, Einselement ist $(1,0)$ und

$$(x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right), \quad (x,y) \neq (0,0). \tag{6.3.2}$$

Beweis. Übungen

$$\begin{aligned} (x_1, 0) + (x_2, 0) &= (x_1 + x_2, 0) \\ (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) &= (x_1 \cdot x_2, 0) \end{aligned}$$

Wir können also $x \in \mathbb{R}$ mit $(x, 0) \in \mathbb{C}$ identifizieren. $\square$

Def. 6.3.2

i) $i := (0, 1)$ heißt imaginäre Einheit, es gilt

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1, 0) = -1. \tag{6.3.3}$$

Man schreibt auch

$$\begin{aligned} z = (x, y) &= (x, 0) + (0, y) \\ &= \underbrace{(x, 0)}_{x} + \underbrace{(0, 1)}_{i} \underbrace{(y, 0)}_{x} \\ &= x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

ii) Sei $z = x + iy$. Dann heißt

$\mathrm{Re}(z) := x$ der Realteil und

$\mathrm{Im}(z) := y$ der Imaginärteil von z.

iii) $\overline{z} = x - iy$ heißt komplexe konjugierte Zahl zu $z = x + iy$.

iv) $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$ heißt Betrag von z, es gilt

$|z| = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = \sqrt{x^2 + ixy - ixy - (iy)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Satz 6.3.3 Es gilt

i) $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}),\ \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

ii) $\overline{\overline{z}} = z$

iii) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

iv) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

Beweis.

i)
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(z + \overline{z}) &= \frac{1}{2}(x + iy + x - iy) &= \frac{2x}{2} &= x \\ \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) &= \frac{1}{2i}(x + iy - x + iy) &= \frac{2iy}{2i} &= y \end{aligned}$$

Rest analog $\square$

Satz 6.3.4

i) $\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

ii) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

iii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Beweis. nur iii)

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z_2}| = z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 \\
&\overset{\text{Satz 6.3.3}}{=} |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) + |z_2|^2 \\
\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) &\leq |z_1\overline{z}_2| \overset{\text{ii)}}{=} |z_1||\overline{z}_2| = |z_1||z_2| \Longrightarrow \\
|z_1 + z_2|^2 &\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2
\end{aligned}$$

□

B. Folgen und Reihen komplexer Zahlen

Def. 6.3.5 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}, c_n \in \mathbb{C}$, heißt <u>konvergent</u> gegen $c \in \mathbb{C}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon) \;\; \forall n \geq N(\varepsilon) : |c_n - c| < \varepsilon. \tag{6.3.5}$$

Man schreibt: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

Satz 6.3.6 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\Longleftrightarrow$ $\{\mathrm{Im}\, c_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\mathrm{Re}\, c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(c_n) + i \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(c_n). \tag{6.3.6}$$

Beweis.

„$\Longrightarrow$“ $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c = a + ib$

$\Longrightarrow |c - c_n| < \varepsilon, \quad n \geq N(\varepsilon)$

$c_n = a_n + ib_n$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad |a - a_n| &= |\mathrm{Re}(c - c_n)| \leq |c - c_n| < \varepsilon, \\
|b - b_n| &= |\mathrm{Im}(c - c_n)| \leq |c - c_n| < \varepsilon
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

„$\Longleftarrow$“ $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2},\; n \geq N_1,\; |b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2},\; n \geq N_2$

$c := a + ib \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
|c_n - c| &= |(a_n - a) + i(b_n - b)| \\
&\overset{\text{Satz 6.3.4}}{\leq} \underbrace{|a_n - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Satz 6.3.7 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\Longrightarrow$ $\{\overline{c}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} \overline{c}_n = \overline{\lim_{n\to\infty} c_n}. \tag{6.3.7}$$

Beweis. $\operatorname{Re}(\bar{c}_n) = \operatorname{Re}(c_n), \quad \operatorname{Im}(\bar{c}_n) = -\operatorname{Im}(c_n)$ □

Def. 6.3.8 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N(\varepsilon) \;\; \forall\, n, m \geq N(\varepsilon) : |c_n - c_m| < \varepsilon. \tag{6.3.8}$$

Satz 6.3.9

i) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge genau dann, wenn $\{\operatorname{Re}(c_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{\operatorname{Im}(c_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen sind.

ii) In $\mathbb{C}$ konvergiert jede Cauchy-Folge.

Beweis. Analog zu Satz 6.3.6. □

Satz 6.3.10 Seien $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Dann sind $\{c_n + d_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{c_n d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} (c_n + d_n) = \lim_{n\to\infty} c_n + \lim_{n\to\infty} d_n \tag{6.3.9}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n \cdot d_n = \lim_{n\to\infty} c_n \cdot \lim_{n\to\infty} d_n. \tag{6.3.10}$$

Ist außerdem $\lim\limits_{n\to\infty} d_n \neq 0$, so $\exists\, n_0$ mit $d_n \neq 0, n \geq n_0$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{d_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} c_n}{\lim\limits_{n\to\infty} d_n}. \tag{6.3.11}$$

Beweis. Analog zu Satz 3.2.11, 3.2.12, 3.2.14. □

Def. 6.3.11 Eine Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n, \; c_n \in \mathbb{C}$ heißt konvergent, falls

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} c_k \quad \text{konvergiert},$$

und absolut konvergent, wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|$ konvergiert.

Satz 6.3.12

i) (Majoranten-Kriterium) Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n, \; a_n \in \mathbb{R}, \; a_n \geq 0$ konvergent, $|c_n| \leq a_n \;\forall\, n \in \mathbb{N}$.

   Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent.

ii) (Quotienten-Kriterium) Sei $c_n \neq 0, \; n \geq n_0$ und

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \leq q, \; 0 < q < 1, \; n \geq n_0.$$

   Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent.

Beweis. wie Satz 3.3.12, 3.3.13 □

C. Die komplexe Exponentialreihe

Satz 6.3.13 Für jede $z \in \mathbb{C}$ ist die Exponentialreihe

$$e^z := \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{6.3.12}$$

absolut konvergent.

Beweis. Setze $c_n := \dfrac{z^n}{n!}$. O.B.d.A. sei $z \neq 0$, also $c_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\implies \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1}\ n!}{(n+1)!\ z^n}\right| = \frac{|z|}{(n+1)} \leq \frac{1}{2}, \quad n \geq 2|z|$$

Satz 6.3.12 ii) $\implies$ Beh. □

Satz 6.3.14.

i) Es gilt

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} + R_{N+1}(z), \\ |R_{N+1}(z)| &\leq 2\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}, \quad |z| \leq 1 + \frac{N}{2}. \end{aligned} \tag{6.3.13}$$

ii) Es gilt

$$\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C} : e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}. \tag{6.3.14}$$

Beweis. i) wie Satz 3.3.22
ii) wie Satz 3.3.23 □

Satz 6.3.15 Es gilt

$$\forall\, z \in \mathbb{C} : e^{\overline{z}} = \overline{e^z}. \tag{6.3.15}$$

Beweis.

$$s_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\ , \quad s_n^*(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!}$$

$$\overset{\text{Satz 6.6.3}}{\implies} \quad \overline{s_n(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!} = s_n^*(z)$$

$$\implies \begin{aligned} e^{\overline{z}} &= \lim_{n\to\infty} s_n^*(z) &&= \lim_{n\to\infty} \overline{s_n(z)} \\ &= \overline{\lim_{n\to\infty} s_n(z)} &&= \overline{e^z} \end{aligned}$$

□

Def. 6.3.16

i) $f : \mathbb{C} \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt <u>stetig in $p \in D$</u>, falls

$$\lim_{\substack{z \to p \\ z \in D}} f(z) = f(p).$$

ii) f heißt stetig in D, wenn f für alle $p \in D$ stetig ist.

Satz 6.3.17 $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \exp(z)$ ist stetig in $\mathbb{C}$.

Beweis. wie Beipiel 4.1.5 iv) $\square$

6.4 Trigonometrische Funktionen

A. Die Funktionen $\sin(x), \cos(x)$

Def. 6.4.1 Es sei

$$\begin{aligned} \cos x &:= \cos(x) := \mathrm{Re}(e^{ix}), \quad x \in \mathbb{R}, \\ \sin x &:= \sin(x) := \mathrm{Im}(e^{ix}), \quad x \in \mathbb{R}\,, \end{aligned} \tag{6.4.1}$$

d. h. $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.

Satz 6.4.2 Es gilt für $x, y \in \mathbb{R}$

$$|e^{ix}| = 1 \tag{6.4.2}$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}),\ \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \tag{6.4.3}$$

$$\cos(-x) = \cos(x),\ \sin(-x) = -\sin(x) \tag{6.4.4}$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \tag{6.4.5}$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \tag{6.4.6}$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \tag{6.4.7}$$

Beweis.

(6.4.2): $\quad |e^{ix}|^2 = e^{ix} \cdot \overline{e^{ix}} \overset{(6.3.15)}{=} e^{ix}e^{-ix} = e^0 = 1$

(6.4.3) – (6.4.5): $\quad$ folgt aus (6.4.1)

(6.4.6), (6.4.7):

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + i\sin(x+y) &= e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy} \\ &= \big(\cos(x) + i\sin(x)\big)\big(\cos(y) + i\sin(y)\big) \\ &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ &\quad + i\big(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)\big) \end{aligned}$$

$\square$

Korollar 6.4.3 Es gilt

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{6.4.8}$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{6.4.9}$$

Beweis. $u := \dfrac{x+y}{2},\ v := \dfrac{x-y}{2} \implies s = u+v,\ y = u-v \implies$

$$\begin{aligned}
\sin(x) - \sin(y) &= \sin(u+v) - \sin(u-v) \\
&\overset{(6.4.7)}{=} \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v) - \big(\sin(u)\cos(-v) + \cos(u)\sin(-v)\big) \\
&\overset{(6.4.4)}{=} 2\cos(u)\sin(v) \\
&= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \implies (6.4.8)
\end{aligned}$$

(6.4.9) analog □

Satz 6.4.4 Es gilt

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{6.4.10}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{6.4.11}$$

mit absoluter Konvergenz auf ganz $\mathbb{R}$.

Beweis. Es gilt

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad n = 4m \\ i, & \text{falls} \quad n = 4m+1 \\ -1, & \text{falls} \quad n = 4m+2 \\ -i, & \text{falls} \quad n = 4m+3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{x^n}{n!} \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{\cos(x)} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin(x)}
\end{aligned}$$

Die absolute Konvergenz folgt mit Satz 6.3.13. □

Satz 6.4.5 Es gilt

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+2}(x)$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+3}(x)$$

mit

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}, \ |x| \leq 2n+3 \tag{6.4.12}$$

$$|R_{2n+3}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}, \ |x| \leq 2n+4 \tag{6.4.13}$$

Beweis. (6.4.12)

(6.4.10) $\implies R_{2n+2}(x) = \pm\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\Big(1 - \frac{x^2}{(2n+3)(2n+4)} \pm \dots\Big)$

$a_k := \frac{x^{2k}}{(2n+3)(2n+4)\dots 2n+2(k+1}$

$\implies R_{2n+2}(x) = \pm\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}(1 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots)$

$a_k = a_{k-1}\frac{x^2}{(2n+2k+1)(2n+2k+2}$

$\implies 1 > a_1 > a_2 > a_3 > \dots$ falls $|x| \leq 2n+3$

analog zum Beweis von Satz 3.3.7 $\implies 0 \leq 1 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \dots \leq 1$

$\implies |R_{n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$

(6.4.13) analog □

Korollar 6.4.6 Es gilt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1. \tag{6.4.14}$$

Beweis. (6.4.14), $n = 0 \implies$

$\sin(x) = x + R_3(x), \quad |R_3| \leq \frac{|x|^3}{3!}, \quad |x| \leq 4$

$$\begin{aligned}\implies \ |\sin(x) - x| &\leq \frac{|x|^3}{6}, \quad |x| \leq 4 \implies \\ \Big|\frac{\sin(x)}{x} - 1\Big| &\leq \frac{|x|^2}{6}, \quad 0 < |x| \leq 4\end{aligned}$$

□

Def. 6.4.7

i) Für $x \in \mathbb{R}\backslash\Big\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\Big\}$ setzt man

$$\tan x := \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}. \tag{6.4.15}$$

ii) Für $x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ setzt man

$$\cot x := \cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}. \tag{6.4.16}$$

Satz 6.4.8 Die Funktionen $\sin, \cos, \tan, \cot$ sind differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \cos(x) && (6.4.17)\\ \cos'(x) &= -\sin(x) && (6.4.18)\\ \tan(x)' &= \frac{1}{\cos^2(x)} && (6.4.19)\\ \cot(x)' &= -\frac{1}{\sin^2(x)} && (6.4.20) \end{aligned}$$

auf dem jeweiligen Definitionsbereich.

Beweis. Übungen $\square$

Satz 6.4.9 Die Funktion cos ist in $[0, 2]$ streng monoton fallend.

Beweis. Man kann zeigen (Übungen):

$\sin(x) > 0 \quad \forall\, x \in (0, 2)$

$(6.4.18) \Longrightarrow \cos'(x) = -\sin(x) < 0 \ \ \forall\, x \in (0, 2)$

$\overset{\text{Satz 5.3.8}}{\Longrightarrow} \cos(x)$ streng monoton fallend $\square$

Satz 6.4.10 Die Funktion cos hat in $[0, 2]$ genau eine Nullstelle. Diese wird mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet.

Beweis. Man kann zeigen (Übungen):

$\cos(2) \leq -\frac{1}{3} \quad \cos(0) = 1 \overset{\text{Satz 4.2.1}}{\Longrightarrow} \cos(x)$

besitzt Nullstelle $\overset{\text{Satz6.4.10}}{\Longrightarrow} \cos(x)$ besitzt genau eine Nullstelle. $\square$

Satz 6.4.11 Es gilt

$$\left.\begin{aligned} \cos(x+2\pi) &= \cos(x), & \sin(x+2\pi) &= \sin(x)\\ \cos(x+\pi) &= -\cos(x), & \sin(x+\pi) &= -\sin(x)\\ \cos(x) &= \sin\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right), & \sin(x) &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) \end{aligned}\right\} \qquad (6.4.21)$$

Beweis. Übungen

<u>Bem.:</u> Satz 6.4.11 $\Longrightarrow$

$D = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

$D' = \mathbb{R}\backslash\{k\pi\}$ $\square$

B. Die Umkehrfunktionen

Satz 6.4.12

i) cos ist in $[0, \pi]$ streng monoton fallend und eine Bijektion auf $[-1, 1]$. Die Umkehrfunktion $\arccos : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist auf $(-1, 1)$ diffb. und es gilt

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{6.4.22}$$

ii) sin ist in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton wachsend und Bijektion auf $[-1, 1]$. Die Umkehrfunktion $\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in $(-1, 1)$ diffb. und es gilt

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{6.4.23}$$

Beweis.

i) Satz 6.4.9 $\Longrightarrow$ cos in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ streng monoton fallend

$(6.4.21) \Longrightarrow \cos(x) = -\cos(\pi - x)$

$\Longrightarrow \cos(\pi - \cdot)$ monoton wachsend in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\Longrightarrow$ cos streng monoton fallend auf $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$\overset{\text{Satz 4.2.17}}{\Longrightarrow}$ cos Bijektion auf $[\cos \pi, \cos(0)] = [-1, 1]$

Satz 5.2.4 $\Longrightarrow (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$\Longrightarrow \arccos'(x) = \dfrac{1}{\cos'(\arccos(x))} \overset{(6.4.18)}{=} \dfrac{1}{-\sin(\arccos(x))}$

$x \in (-1, 1) \Longrightarrow \arccos(x) \in (0, \pi),\ \sin y > 0,\ y \in (0, 2)$

$(6.4.21) \Longrightarrow \sin(y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \Longrightarrow \sin(y) > 0,\ y \in (0, \pi)$

$$\overset{(6.4.5)}{\Longrightarrow} \quad \sin(\arccos(x)) \;=\; \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))},\ x \in (-1, 1)$$
$$= \sqrt{1 - x^2}$$

$\Longrightarrow \quad (6.4.22)$

ii) $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \overset{\text{ii.)}}{\Longrightarrow}$ sin streng monoton wachsend in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, Bijektion auf $[-1, 1]$

Satz 5.2.4 $\Longrightarrow \arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sin'(\arcsin(x))} \overset{(6.4.17)}{=} \dfrac{1}{\cos(\arcsin(x))}$

$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}$

$\Longrightarrow \arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$

$\square$

Satz 6.4.13 tan ist in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ streng monoton wachsend und Bijektion auf $\mathbb{R}$. Die Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ist diffb. und es gilt

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}. \tag{6.4.24}$$

Beweis.

i) tan ist streng monoton wachsend.

$0 \leq x < x' < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sin(x) < \sin(x'),\ \cos(x) > \cos(x') > 0$

$\Longrightarrow\ \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} < \frac{\sin(x')}{\cos(x')} = \tan(x') \Longrightarrow$

$\tan(x)$ in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ monoton wachsend, $\tan(-x) = -\tan(x)$

$\Longrightarrow$ tan monoton wachsend in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

ii) $\lim\limits_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$

Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Folge, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$

$\Longrightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos x_n}{\sin x_n} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2})} = \frac{0}{1} = 0$

$\Longrightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} \tan(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(x_n)}{\cos(x_n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\cos(x_n)}{\sin(x_n)}} = \infty$

iii) $\lim\limits_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \lim\limits_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} -\tan(-x) = \lim\limits_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} -\tan(x) = -\infty$

iv) (6.4.24)

Satz 5.2.4 $\Longrightarrow$

$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} \overset{(6.4.19)}{=} \cos^2(\arctan(x))$

$\tan^2(y) = \frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)} = \frac{1-\cos^2(y)}{\cos^2(y)} = \frac{1}{\cos^2(y)} - 1$

$\Longrightarrow\ \frac{1}{1+\tan^2(y)} = \cos^2(y) \ \Longrightarrow$

$\arctan'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$

□

7 Integralrechnung

Aufgabe: Bestimmung der Fläche unterhalb von Kurven.

Vorgehen: 1. Betrachte „einfache“ Funktionen.
2. Berechne Fläche für „einfache“ Funktion.
3. Approximiere beliebige Funktion durch „einfache“ .

7.1 Treppenfunktionen

Beispiele 3.1.2 ii)

$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$

$c_1, \ldots, c_n, d_0, \ldots, d_n \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rccccl} \varphi: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\ & x & \longmapsto & \varphi(x) & = & \begin{cases} c_k, & \text{falls} \quad x \in (t_{k-1}, t_k) \\ d_k, & \text{falls} \quad x = t_k \end{cases} \end{array}$$

Satz 7.1.1 $T[a,b] :=$ Menge aller Treppenfunktionen auf $[a,b]$. Dann gilt

i) $0 \in T[a,b]$

ii) $\delta, \psi \in T[a,b] \implies \delta + \psi \in T[a,b]$

iii) $\delta \in T[a,b] \implies \lambda\delta \in T[a,b],\ \lambda \in \mathbb{R}$

Beweis. i), iii) klar

ii) $\delta \mathrel{\widehat{=}} Z: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

$\psi \mathrel{\widehat{=}} Z': \ a = x'_0 < x'_1 < \ldots < x'_m = b$

$\widetilde{Z} = Z \cup Z' = \{t_0, \ldots, t_k\} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \cup \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_m\}$

$\implies \delta, \psi$ konstant auf (t_{j-1}, t_j)

$\implies \varphi + \psi$ konstant auf $(t_{j-1}, t_j) \implies \delta + \psi \in T[a,b]$

□

Def. 7.1.2 $\delta \in T[a,b],\ \delta(x) = c_k,\ x \in (x_{k-1}, x_k)$

$$\int_a^b \delta(x)dx := \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}) \tag{7.1.1}$$

Satz 7.1.3 (7.1.1) ist unabhängig von der Zerlegung.

Beweis.

$Z: \; a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b, \; \delta|_{[x_{i-1},x_i)} = c_i$

$Z': \; a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = b, \; \delta|_{[t_{j-1},t_j)} = c'_j$

$\displaystyle\int_Z \delta(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}), \; \int_{Z'} \delta(x)dx = \sum_{j=1}^m c'_j(t_j - t_{j-1})$

1. Fall: $\quad x_i = t_{k_i}$ für alle i

$\Longrightarrow \; x_{i-1=t_{k_{i-1}}} < t_{k_{i-1}+1} < \ldots < t_{k_i} = x_i$

$c'_j = c_i, \; k_{i-1} < j < k_i$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \int_{Z'} \delta(x)dx \; &\overset{(7.1.1)}{=} \; \sum_{j=1}^m c'_j(t_j - t_{j-1}) \\
&= \; \sum_{i=1}^n \sum_{j=k_{i-1}-1}^{k_i} c_i(t_j - t_{j-1}) \\
&= \; \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) \; = \; \int_Z \delta(x)dx
\end{aligned}$$

2. Fall: $\quad Z, Z'$ beliebig, $\widetilde{Z} := Z \cup Z'$

$\displaystyle\overset{\text{Fall 1}}{\Longrightarrow} \; \int_Z \delta(x)dx \; = \int_{\widetilde{Z}} \delta(x)dx \; = \int_{Z'} \delta(x)dx$

□

Schreibweise:

$$\delta \le \psi \iff \delta(x) \le \psi(x) \quad \forall x \in [a,b] \tag{7.1.2}$$

Satz 7.1.4 $\;\varphi, \psi \in T[a,b], \lambda \in \mathbb{R}$

i) $\displaystyle\int_a^b (\delta + \psi)(x)dx \; = \int_a^b \delta(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx$

ii) $\displaystyle\int_a^b (\lambda\delta)(x)dx = \lambda \int_a^b \delta(x)dx$

iii) $\displaystyle\delta \le \psi \; \Longrightarrow \int_a^b \delta(x)dx \; \le \int_a^b \psi(x)dx$

Beweis. Satz 7.1.3 $\Longrightarrow$ o.B.d.A. dieselbe Zerlegung □

7.2 Das Riemann-Integral

A. Ober- und Unterintegral

Def. 7.2.1 Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

$$\int_a^{b_*} f(x)dx := \inf\left\{ \int_a^b \delta(x)dx,\ \delta \in T[a,b],\ \delta \geq f \right\} \quad \text{(Oberintegral)} \tag{7.2.1}$$

$$\int_{a^*}^{b} f(x)dx := \sup\left\{ \int_a^b \delta(x)dx,\ \delta \in T[a,b],\ \delta \leq f \right\} \quad \text{(Unterintegral)} \tag{7.2.2}$$

Beispiele 7.2.2

i) $\delta \in T[a,b]$

$$\int_a^{b_*} \delta(x)dx \ = \int_a^b \delta(x) \ = \int_{a^*}^b \delta(x)dx$$

ii) $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad x \quad \text{rational} \\ 0, & \text{falls} \quad x \quad \text{irrational} \end{cases} \qquad \Longrightarrow$$

$$\int_0^{1_*} f(x)dx = 1, \quad \int_{0^*}^1 f(x)dx = 0$$

Satz 7.2.3 $f.g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt

i) $\displaystyle\int^* (f+g)(x)dx \leq \int^* f(x)dx + \int^* g(x)dx$

ii) $\displaystyle\int^* (\lambda f)(x)dx = \lambda \int^* f(x)dx, \quad \lambda > 0$

Beweis.

i) zu zeigen:

$$\int^* (f+g)(x)dx \leq \int^* f(x)dx + \int^* g(x)dx + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

(7.2.1) $\Longrightarrow \exists \delta, \psi \in T[a,b]$ mit $\delta \geq f, \psi \geq g$ und

$$\int \delta(x)dx \leq \int^* f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int \psi(x)dx \leq \int^* g(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

$\delta + \psi \geq f + g \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} \int^* (f+g)(x)dx \ &\leq \ \int (\delta+\psi)(x)dx \overset{\text{Satz 7.1.4}}{=} \int \delta(x)dx + \int \psi(x)dx \\ &\leq \ \int^* f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} + \int^* g(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \ \int^* f(x)dx + \int^* g(x)dx + \varepsilon \end{aligned}$$

ii) zu zeigen:

$$\lambda \int^* f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} \leq \int^* (\lambda f)(x)dx \leq \lambda \int^* f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall \varepsilon > 0$$

$\lambda > 0 \Longrightarrow \exists \delta \in T[a,b], \delta \geq f$, mit

$$\int \delta(x)dx \leq \int^* f(x)dx + \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

$\lambda\delta \geq \lambda f \implies$

$$\begin{aligned} \int^* (\lambda f)(x)dx &\leq \textstyle\int (\lambda\delta)(x)dx \overset{\text{Satz 7.1.4}}{=} \lambda \int \delta(x)dx \\ &\leq \lambda\Big(\int^* f(x)dx + \frac{\varepsilon}{\lambda}\Big) \\ &= \lambda \textstyle\int^* f(x)dx + \varepsilon \end{aligned}$$

Analog: $\lambda \int^* f(x)dx \leq \int^* (\lambda f)(x)dx + \varepsilon$

□

Korollar 7.2.4 $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt

i) $\int_* (f+g)(x)dx \geq \int_* f(x)dx + \int_* g(x)dx$

ii) $\int_* (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_* f(x)dx, \quad \lambda > 0$

iii) $\int^* (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_* f(x)dx, \quad \lambda < 0$

Beweis. Übungen □

B. Riemann-Integrierbarkeit

Def. 7.2.5 $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt heißt Riemann-integrierbar, wenn

$$\int_a^{b_*} f(x)dx = \int_{a^*}^b f(x)dx. \tag{7.2.3}$$

Man setzt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{b_*} f(x)dx. \tag{7.2.4}$$

Beispiele 7.2.6

i) $\varphi \in T[a,b] \Longrightarrow \varphi$ Riemann-integrierbar (Beispiel 7.2.2 i))

ii) $f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$

$\int_0^{1_*} f(x)dx = 1, \ \int_{0^*}^1 f(x)dx = 0 \implies f$ nicht Riemann-integrierbar

Satz 7.2.7 $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta, \psi \in T[a,b]$ mit $\delta \leq f \leq \psi$, $\displaystyle\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \delta(x)dx \leq \varepsilon$.

Beweis. „$\Longrightarrow$" Annahme:

$$\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \delta(x)dx > \varepsilon \implies \int_a^b \psi(x)dx > \varepsilon + \int_a^b \delta(x)dx$$

$$\implies \inf\Big\{ \int_a^b \psi(x)dx, \psi \geq f \Big\} \geq \varepsilon + \sup\Big\{ \int_a^b \delta(x)dx, \delta \leq f \Big\}$$

$$\implies \int_a^{b_*} f(x)dx \geq \varepsilon + \int_{a^*}^b f(x)dx$$

„$\Longleftarrow$" analog $\square$

Satz 7.2.8 Jede stetige Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Beweis. Satz 4.2.12 $\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \, \delta, \psi \in T[a,b]$ mit

$$\delta(x) \leq f(x) \leq \psi(x), \quad \psi(x) - \delta(x) \leq \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad x \in [a,b]$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \delta(x)dx \quad &\overset{\text{Satz 6.1.4}}{=} \quad \int_a^b (\psi(x) - \delta(x))dx \\
&\overset{\text{Satz 6.1.4}}{\leq} \quad \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\, dx \\
&\overset{\text{Def. 6.1.2}}{=} \quad \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Satz 7.2.7 $\Longrightarrow$ Beh. $\square$

Satz 7.2.9 Jede monotone Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Beweis. f monoton wachsend

$$Z := \Big\{ x_k : x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \; k = 0, 1, 2, \ldots, n \Big\}$$

$$\delta(x) := f(x_{k-1}), \quad x_{k-1} \leq x < x_k$$

$$\psi(x) := f(x_k), \quad x_{k-1} \leq x < x_k$$

$$\delta(b) = \psi(b) = f(b)$$

f monoton wachsend $\Longrightarrow \delta(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$

Also

$$\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \delta(x)dx$$

$$\overset{\text{Def. 7.1.2}}{=} \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big)(x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big)\Big(\frac{b-a}{n}\Big)$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) = \frac{b-a}{n} \big(f(b) - f(a)\big) \leq \varepsilon,$$

n hinreichend groß, Satz 7.2.7 $\Longrightarrow$ Beh.

„monoton fallend“ analog □

C. Eigenschaften integrierbarer Funktionen

Satz 7.2.10 $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, $\lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow f + g$, λf integrierbar und es gilt

i) $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

ii) $\displaystyle\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

iii) $\displaystyle f \leq g \implies \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Beweis. i)

$$\begin{aligned}
\int_{a^*}^b f(x)dx + \int_{a^*}^b g(x)dx \quad &\overset{\text{Korollar 7.2.4}}{\leq} \quad \int_{a^*}^b (f+g)(x)dx \\
&\leq \quad \int_a^{b_*} (f+g)(x)dx \\
&\overset{\text{Satz 7.2.3}}{\leq} \quad \int_a^{b_*} f(x)dx + \int_a^{b_*} g(x)dx
\end{aligned}$$

f, g integrierbar $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad &\leq \quad \int_{a^*}^b (f+g)(x)dx \\
&\leq \quad \int_a^{b_*} (f+g)(x)dx \\
&\leq \quad \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx
\end{aligned}$$

ii), iii) Übungen □

Def. 7.2.11 $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x), & f(x) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{7.2.5}$$

$$f_-(x) := \begin{cases} f(x), & -f(x) < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f = f_+ - f_-\,, \quad |f| = f_+ + f_-$$

Satz 7.2.12 $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar

i) $f_+, f_-, |f|$ sind integrierbar und

$$\Big| \int_a^b f(x)dx \Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx. \tag{7.2.6}$$

ii) $|f|^p$ ist integrierbar, $p \in [1, \infty)$.

iii) $f \cdot g$ ist integrierbar.

Beweis.

i) zunächst f_+

f integrierbar $\overset{\text{Satz 7.2.7}}{\Longrightarrow} \displaystyle\int_a^b (\psi - \delta)(x) \leq \varepsilon, \quad \delta \leq f \leq \psi$

$\delta_+, \psi_+ \in T[a,b], \quad \delta_+ \leq f_+ \leq \psi_+, \quad \psi_+ - \delta_+ \leq \psi - \delta$

$\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b (\psi_+ - \delta_+)(x)dx \overset{\text{Satz 7.1.4}}{\Longrightarrow} \int_a^b (\psi - \delta)(x)dx \leq \varepsilon$

$\overset{\text{Satz 7.2.7}}{\Longrightarrow} f_+$ integrierbar, f_- analog

Satz 7.2.10 $\Longrightarrow |f| = f_+ + f_-$ integrierbar

(7.2.6): $\quad f \leq |f|, \; -f \leq |f|$

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \overset{\text{Satz 7.2.10}}{\leq} \int_a^b |f(x)|dx$$

$$-\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

ii) f beschränkt $\Longrightarrow$ o.B.d.A $0 \leq f \leq 1$

Satz 7.2.7 $\Longrightarrow \exists\, \delta, \psi \in T[a,b]$ mit $0 \leq \delta \leq f \leq \psi \leq 1, \quad \displaystyle\int_a^b (\psi - \delta)(x)dx \leq \frac{\varepsilon}{p}$

$\delta^p, \psi^p \in T[a,b], \quad \delta^p \leq f^p \leq \psi^p$

Korollar 5.3.5: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$ für ein $\xi \in (a,b)$

$h(x) = x^p \overset{(6.2.6)}{\Longrightarrow} h'(x) = px^{p-1} \overset{\text{Korollar 5.3.5}}{\Longrightarrow} \psi^p - \delta^p \leq p(\psi - \delta)$

$\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b (\psi^p - \delta^p)dx \leq p \int_a^b (\psi - \delta)dx \leq p\,\frac{\varepsilon}{p} = \varepsilon$

Satz 7.2.7 $\Longrightarrow f^p$ integrierbar

iii) $f \cdot g = \dfrac{1}{4}\big[(f+g)^2 - (f-g)^2\big]$ □

Satz 7.2.13 (Mittelwertsatz)

$f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $g \geq 0 \Longrightarrow \exists\, \xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b (f \cdot g)(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx. \tag{7.2.7}$$

Beweis. f, g stetig $\overset{\text{Satz 4.2.5}}{\Longrightarrow}$

$f(p) = \sup\{f(x), x \in [a,b]\}$

$f(q) = \inf\{f(x), x \in [a,b]\}$

$\Longrightarrow\ f(q)g(x) \leq f(x)g(x) \leq f(p)g(x)$

$\overset{\text{Satz 7.2.10}}{\Longrightarrow} \displaystyle\int_a^b f(q)g(x) = f(q)\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b (f\cdot g)(x)dx \leq f(p)\int_a^b g(x)dx$

$\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b (f \cdot g)(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx, \quad f(q) \leq \mu \leq f(p)$

Korollar 4.2.2 $\Longrightarrow \exists\, \xi \in [q,p]$ mit $f(\xi) = \mu$ □

D. Riemannsche Summen

Def. 7.2.14 $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktion, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,\ \xi_k \in [x_{k=1}, x_k]$

Dann heißt

$$S(Z,f) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \tag{7.2.8}$$

<u>Riemannsche Summe</u> der Funktion f bgzl. $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$

$$\eta := \max_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1}) \qquad \text{„Feinheit“}. \tag{7.2.9}$$

Satz 7.2.15 Sei $f : [a,b] \longrightarrow$ integrierbar $\Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$, so dass für jede Unterteilung $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ mit $\eta < \delta$ gilt

$$\Big|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\Big| \leq \varepsilon. \tag{7.2.10}$$

Beweis. $\delta, \psi \in T[a,b],\ \delta \leq f \leq \psi\ \Longrightarrow$

$S(Z,\delta) \le S(Z,f) \le S(Z,\psi)$

o.B.d.A.: $f \in T[a,b]$

$f \mathrel{\widehat{=}} Z: \; a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$

$M := \sup\{|f(x)|, x \in [a,b]\}$

$Z' := \big(\{x_k\}_{0\le k\le n}, \{\xi_k\}_{0\le k\le n}\big)$

$\phi(x) = \begin{cases} f(a), & x = a \\ f(\xi_k), & x_{k-1} < x \le x_k \end{cases}$

$\overset{(7.2.8)}{\Longrightarrow} S(Z',f) = \int_a^b \varphi(x)dx \;\Longrightarrow$

$\left|S(Z',f) - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \overset{(7.2.6)}{\le} \int_a^b |\varphi(x) - f(x)|dx$

$f = f$ auf (x_{k-1}, x_k), falls $t_j \notin [x_{k-1}, x_k] \; \forall j$

$\Longrightarrow |\varphi(x) - f(x)| \ne 0$ auf $2m$ Teilintervallen, Gesamtlänge $2m\eta \Longrightarrow$

$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx \le 4mM\eta$, da $|f(x) - \varphi(x)| \le 2M$

$\lim\limits_{\eta\to 0} 4mM\eta = 0 \Longrightarrow$ Beh. $\square$

Satz 7.2.16 Sei $a < b < c, \; f : [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann ist f ist genau dann integrierbar, wenn $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ integrierbar sind und

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx. \tag{7.2.11}$$

Beweis. Übungen $\square$

Def. 7.2.17

$$\int_a^a f(x)dx := 0, \tag{7.2.12}$$

$$\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx, \text{ falls } \; a > b. \tag{7.2.13}$$

7.3 Integration und Differentiation

A. Unbestimmtes Integral, Stammfunktion

Satz 7.3.1 Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $a \in I$

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt \tag{7.3.1}$$

$\Longrightarrow F$ ist differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = f(x) \tag{7.3.2}$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right)\\
&\overset{\text{Satz 7.2.16}}{=} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x} f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right)\\
&= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt\\
&\overset{\text{Satz 7.2.13}}{=} \frac{1}{h} f(\xi_h)h \quad (g=1, a=x, b=x+h)\\
&= f(\xi_h)
\end{aligned}
$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi_h) \overset{f\,\text{stetig}}{=} f\big(\lim_{h\to 0}\xi_h\big) = f(x) \qquad \square$$

Def. 7.3.2 $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f, falls $F' = f$.

Satz 7.3.3 F Stammfunktion von $f \Longrightarrow G : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Stammfunktion von f, falls $F - G$ konstant ist.

Beweis. „$\Longleftarrow$“ $F - G = c \Longrightarrow G = F - c \Longrightarrow G' = (F-c)' = F' = f$

„$\Longrightarrow$“ G Stammfunktion von $f \Longrightarrow G' = f = F'$

$$\Longrightarrow (F-G)' = 0 \overset{\text{Korollar}}{\Longrightarrow} F - G = c \qquad \square$$

Satz 7.3.4 (Fundamentalsatz)

Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{7.3.3}$$

Beweis. $F_a(x) := \int_a^x f(t)dt \overset{\text{Satz 7.3.1}}{\Longrightarrow} F_a$ ist Stammfunktion.

$$
\begin{aligned}
F_a(a) &= \int_a^a f(t)dt \overset{\text{Def. 7.2.17}}{=} 0\\
F_a(b) &= \int_a^b f(t)dt \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt = F_a(b) - F_a(a)
\end{aligned}
$$

F weitere Stammfunktion $\Longrightarrow$

$$F(b) - F(a) \overset{\text{Satz 7.3.3}}{=} (F_a(b)+c) - (F_a(a)+c) = F_a(b) - F_a(a) = \int_a^b f(t)dt \qquad \square$$

Schreibweise.

$$F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a)\ , \quad \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b\ , \quad \int f(x)dx = F(x) \tag{7.3.4}$$

Beispiele 7.3.5

i) $0 < a < b$

$$\int_a^b x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_a^b\ , \quad \alpha \neq -1$$

$$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \overset{(6.2.6)}{\Longrightarrow} F'(x) = \frac{(\alpha+1)x^\alpha}{(\alpha+1)} = x^\alpha$$

ii) $$\int \sin(x)dx = -\cos(x) \tag{6.4.18}$$

iii) $$\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \tan(x) \tag{6.4.19}$$

iii) $$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos(x) \tag{6.4.22}$$

iv) $$\int e^x dx = e^x$$

v) $$\int_a^b \frac{dx}{x} \overset{(6.2.4)}{=} \log(x)\Big|_a^b\ , \quad 0 < a < b$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \log(-x)\Big|_a^b\ , \quad \log'(-x) = \frac{1}{(-x)}(-x)\ , \quad a < b < 0$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \log|x|\ , \quad x \neq 0$$

B. Substitutionsregel

Satz 7.3.6 Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig diffb., $\varphi([a,b]) \subset I \Longrightarrow$

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx. \tag{7.3.5}$$

Beweis. $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ Stammfunktion von f

$(F \circ \varphi)'(t) \overset{\text{Satz 5.2.2}}{=} F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt &\overset{\text{Satz 7.3.4}}{=} (F\circ\varphi)(b) - (F\circ\varphi)(a)\\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))\\ &\overset{\text{Satz 7.3.4}}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx\end{aligned}$$

□

Bemerkung 7.3.7

i) Man schreibt

$$d\varphi := \varphi'(t)dt \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt} = \varphi'(t)\right) \tag{7.3.6}$$

$$\int_a^b f(\varphi(t))d\varphi = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

ii) φ braucht <u>nicht</u> invertierbar sein! Falls φ^{-1} existiert, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{7.3.7}$$

Beispiele 7.3.8

i) $\displaystyle\int_a^b f(t+c)dt =?$

$\varphi(t) = t + c,\ \varphi'(t) = 1 \Longrightarrow$

$$\int_a^b f(t+c)dt = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$$

$$\int_2^4 (t+3)^2 dt = \int_5^7 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_5^7 = \frac{7^3}{3} - \frac{5^3}{3} = \frac{218}{3}$$

ii) $\displaystyle\int_a^b tf(t^2)dt =? \quad \varphi(t) = t^2 \Longrightarrow \varphi'(t) = 2t \Longrightarrow d\varphi = 2tdt$

$$\Longrightarrow \int_a^b tf(t^2)dt = \int_a^b \frac{1}{2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{a^2}^{b^2} \frac{1}{2} f(x)dx$$

iii) $\displaystyle\int_a^b \tan(t)dt =?, \quad [a,b] \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\int_a^b \tan(t)dt = \int_a^b \frac{\sin(t)}{\cos(t)}dt$$

$f(x) = \frac{1}{x},\ \varphi(t) = \cos(t),\ \varphi'(t) = -\sin(t)$

$\Longrightarrow \tan(t) = -f(\varphi(t))\varphi'(t) \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\int_a^b \tan(t)dt &= -\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\
&= -\int_{\cos(a)}^{\cos(b)} \frac{1}{x}dx = -\log x\Big|_{\cos(a)}^{\cos(b)} \\
&= -\log(\cos(b)) + \log(\cos(a))
\end{aligned}$$

iv) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{5x-1}dx =?$

$t^2 = 5x - 1,\ t = \sqrt{5x-1} =: \varphi^{-1}(x)$

$$\varphi(t) = \frac{1+t^2}{5}\,,\ \varphi'(t) = \frac{2t}{5} \overset{(7.3.7)}{\Longrightarrow}$$

$$\int_1^2 x\sqrt{5x-1}\,dx = \int_{\varphi^{-1}(1)}^{\varphi^{-1}(2)} \Big(\frac{1+t^2}{5}\Big)t\Big(\frac{2t}{5}\Big)dt$$

$$= \int_2^3 \frac{2}{25}(t^2+t^4)dt = \frac{2}{25}\Big[\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{4}\Big]_2^3$$

v) $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = ? \qquad -1 < a < b < 1$

$x = \varphi(t) = \sin(t) \Longrightarrow \varphi^{-1}(x) = \arcsin(x)$

$\varphi'(t) = \cos(t) \overset{(7.3.7)}{\Longrightarrow}$

$$\begin{aligned}\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt \\ &= \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \cos^2(t)dt = \int_u^v \cos^2(t)dt,\end{aligned}$$

wobei $u = \arcsin a, v = \arcsin b$.

$$\cos^2(t) = \Big(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4}(e^{2it}+e^{-2it}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)$$

$$\begin{aligned}\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_u^v \big(\cos(2t)+1\big)dt = \Big[\frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t\Big]_u^v \\ &= \frac{1}{4}\big(\sin(2\arcsin(b))) - \sin(2\arcsin(a))\big) \\ &\quad +\tfrac{1}{3}\big(\arcsin(b) - \arcsin(a)\big)\end{aligned}$$

C. Partielle Integration

Satz 7.3.9 Seien $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx. \tag{7.3.8}$$

Beweis. $F = f \cdot g \overset{(5.2.3)}{\Longrightarrow} F' = f' \cdot g + f \cdot g' \implies f \cdot g' = F' - f'g$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \int_a^b f \cdot g' dx &= \int_a^b \big(F'(x) - f'(x)g(x)\big)dx \\ &= \int_a^b F'(x)dx - \int_a^b f'(x)g(x)dx \\ &= F(b) - F(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx \\ &= f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx\end{aligned}$$

□

Man schreibt auch

$$\int f dg = f \cdot g - \int g df. \tag{7.3.9}$$

Beispiele 7.3.10

i) $\displaystyle\int_a^b \log(x)dx,\ 0 < a < b$

$\log(x) = f(x),\ g'(x) = 1 \Longrightarrow g(x) = x$

$$\begin{aligned}
\int_a^b \log(x)dx &= \int_a^b f(x)g'(x)dx \\
&\overset{(7.3.8)}{=} f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx \\
&= \log(x) \cdot x\Big|_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x}dx \\
&= \log(x) \cdot x\Big|_a^b - (b-a)
\end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned}
I_m &:= \int_a^b \sin^m(x)dx \\
&= \int_a^b \underbrace{\sin^{m-1}(x)}_{f(x)}\underbrace{\sin(x)}_{g'(x)}dx \\
&= -\sin^{m-1}(x)\cos(x)\Big|_a^b - \int_a^b (m-1)\sin^{m-2}(x)\cos(x)\big(-\cos(x)\big)dx \\
&= -\sin^{m-1}(x)\cos(x)\Big|_a^b + (m-1)\int_a^b \big(1-\sin^2(x)\big)\sin^{m-2}(x)dx \\
&= -\sin^{m-1}(x)\cos(x)\Big|_a^b + (m-1)\underbrace{\int_a^b \sin^{m-2}(x)dx}_{I_{m-2}} - (m-1)\underbrace{\int_a^b \sin^m(x)dx}_{I_m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow I_m &= -\frac{1}{m}\sin^{m-1}(x)\cos(x)\Big|_a^b + \frac{m-1}{m}I_{m-2} \\
I_0 &= b-a, \quad I_1 = \int_a^b \sin(x)dx = \cos(x)\Big|_a^b
\end{aligned}$$

Folgerung 7.3.11 (Wallis'sches Produkt)

Es gilt

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}\Big(= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1}\Big).$$

Beweis.

$A_m := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m(x)dx\,, \quad A_0 = \frac{\pi}{2}\,,\ A_1 = 1 \overset{\text{Beisp. 7.3.10ii)}}{\Longrightarrow}$

$A_m = \dfrac{m-1}{m}A_{m-2}\,, \quad m \geq 2$

$$A_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1\cdot \frac{\pi}{2}}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}$$

$$A_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3}$$

$$\sin^{2n+2}(x) \le \sin^{2n+1}(x) \le \sin^{2n}(x), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \implies A_{2n+2} \le A_{2n+1} \le A_{2n}$$

$$\begin{aligned}
\implies \lim_{n\to\infty} \frac{A_{2n+2}}{A_{2n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1 \implies \lim_{n\to\infty} \frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} = 1 \\
\frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} &= \frac{2n\cdot 2n\cdot(2n-2)(2n-2)\cdots 4\cdot 2\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-1)\cdots 3\cdot 3}\cdot\frac{2}{\pi} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}\cdot\frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

$$\implies 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} = \frac{2}{\pi} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}$$

□

Satz 7.3.12 Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und

$$F(k) := \int_a^b f(x)\sin(kx)dx. \tag{7.3.10}$$

Dann gilt $\lim\limits_{|k|\to\infty} F(k) = 0$.

Beweis.

$$\int_a^b f(x)\underbrace{\sin(kx)}_{g'(x)} = -f(x)\frac{\cos kx}{k}\Big|_a^b + \frac{1}{k}\int_a^b f'(x)\cos(kx)dx$$

$$f, f' \text{ stetig} \overset{\text{Satz 4.2.5}}{\implies} |f(x)| \le M,\ |f'(x)| \le M,\ x \in [a,b]$$

$$\begin{aligned}
\implies |F(k)| &= \left|\int_a^b f(x)\sin(kx)dx\right| \\
&\le \frac{2M}{|k|} + \frac{1}{|k|}\int_a^b |f'(x)||\cos(kx)|dx \\
&\le \frac{2M}{|k|} + \frac{M(b-a)}{|k|}
\end{aligned}$$

□

Satz 7.3.13 (Trapez-Regel)

Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\big(f(0)+f(1)\big) - R, \tag{7.3.11}$$

$$R = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)dx = \frac{1}{12}f''(\xi),\ \xi \in (0,1). \tag{7.3.12}$$

Beweis. $\varphi(x) := \frac{1}{2}x(1-x)\ ,\ \varphi'(x) = \frac{1}{2} - x\ ,\ \varphi''(x) = -1$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow R \quad &= \quad \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)dx \overset{(7.3.8)}{=} \underbrace{\varphi(x)f'(x)}_{=0}\Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi'(x)f'(x)dx \\
&\overset{(7.3.8)}{=} \quad -\varphi'(x)f(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \varphi''(x)f(x)dx \\
&= \quad \frac{1}{2}\big(f(0)+f(1)\big) - \int_0^1 f(x)dx
\end{aligned}$$

aber: $\varphi(x) \geq 0,\ x \in [0,1] \overset{\text{Satz 7.2.13}}{\Longrightarrow}$

$$R = \int_0^1 \varphi(x)f''(x)dx = f''(\xi)\int_0^1 \varphi(x)dx = \frac{1}{12}f''(\xi) \qquad \square$$

D. Integration rationaler Funktionen

Berechnung von $\displaystyle\int \frac{u(x)}{v(x)}dx$, u, v Polynome

o.B.d.A. Grad $u(x) <$ Grad $v(x)$, denn

$\displaystyle\frac{u(x)}{v(x)} = p(x) + \frac{r(x)}{s(x)}$, Grad $r <$ Grad s

Beispiel: $\displaystyle f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x+1}$

$$\begin{array}{llllllll}
(& x^2 & - & 2x & + & 1 &) & : \ (x+1) \ = \ x-3 \\
 & x^2 & + & & & 1 & & \\ \hline
 & & - & 3x & + & 1 & & \\
 & & - & 3x & - & 3 & & \\ \hline
 & & & & & 4 & &
\end{array}$$

$$\frac{x^2-2x+1}{x+1} = x - 3 + \frac{4}{x+1}$$

Man kann zeigen: $\displaystyle\frac{u(x)}{v(x)}$ besitzt <u>Partialbruchzerlegung</u>, d. h. Summe von

1) $\displaystyle\frac{1}{(Ax+B)^k}$, $A \neq 0\ ,\ k \geq 1$

2) $\displaystyle\frac{1}{(Ax^2+2Bx+C)^k}$, $A \neq 0\ ,\ k \geq 1$

$D = AC - B^2 > 0$

3) $\displaystyle\frac{x}{(Ax^2+2Bx+C)^k}$, $A \neq 0\ ,\ k \geq 1$

Typ 1 $\displaystyle\int \frac{dx}{(Ax+B)^k}$

$t = Ax + B,\ \varphi(t) = \frac{1}{A}(t-B),\ \varphi' = \frac{1}{A} \overset{(7.3.5)}{\Longrightarrow}$

$$\int \frac{dx}{(Ax+B)^k} = \frac{1}{A}\int \frac{dt}{t^k} = \begin{cases} \frac{1}{A}\log|t|, & k=1 \\ \frac{1}{A}\frac{1}{1-k}\frac{1}{t^{k-1}}, & k>1 \end{cases}$$

Typ 2 $\displaystyle\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^k}$

$Ax^2 + 2Bx + C = A^{-1}((Ax+B)^2 + D),\ D = AC - B^2$

$\frac{(Ax+B)^2}{D} = t^2 \implies x = \varphi(t) = A^{-1}(\sqrt{D}t - B) \implies \varphi'(t) = A^{-1}\sqrt{D} \implies$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^k} &= A^k \int \frac{dx}{((Ax+B)^2+D)^k} \\ &= \frac{A^k}{D^k}\int \frac{1}{(t^2+1)^k}\frac{\sqrt{D}}{A}dt \\ &= \frac{A^{k-1}}{D^{k-1/2}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} \end{aligned}$$

$I_k := \displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+1)^k}$

$k = 1$: $\overset{\text{Satz 6.4.13}}{\Longrightarrow} I_1 = \arctan(x)$

$k \geq 1$: $\overset{\text{Satz 7.3.9}}{\Longrightarrow} f(x) = \frac{1}{(t^2+1)^k},\ g'(x) = 1 \implies$

$$\begin{aligned} I_k = \int \frac{dt}{(t^2+1)^k} &= \frac{t}{(t^2+1)^k} - \int t\frac{(-2kt)}{(t^2+1)^{k+1}}dt \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2k\int \Big(\frac{1}{(t^2+1)^k} - \frac{1}{(t^2+1)^{k+1}}\Big)dt \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2kI_k - 2kI_{k+1} \end{aligned}$$

$$\implies I_{k+1} = \frac{2k-1}{2k}I_k + \frac{1}{2k}\frac{t}{(t^2+1)^k}$$

Typ 3 $\displaystyle\int \frac{xdx}{(Ax^2+2Bx+C)^k} = \frac{1}{2A}\int \frac{(2Ax+2B)}{(Ax^2+2Bx+C)^k}dx - \underbrace{\frac{B}{A}\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^k}}_{\text{Typ 2 } \surd}$

$\varphi(x) = Ax^2 + 2Bx + C \implies$

$$\frac{1}{2A}\int \frac{(2Ax+2B)}{(Ax^2+2Bx+C)^k}dx = \frac{1}{2A}\int \frac{\varphi'(x)}{(\varphi(x))^k}dx = \frac{1}{2A}\begin{cases} \log|\varphi(x)| & k=1 \\ \dfrac{1}{1-k}\dfrac{1}{\varphi(x)^{k-1}} & k>1 \end{cases}$$

Beispiel. $\dfrac{x^2-x+1}{x^3-x^2+2x-2}$

$x^3-x^2+2x-2 = (x-1)(x^2+2)$

Ansatz:

$$\frac{x^2-x+1}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x^2+2} + \frac{cx}{x^2+2}$$

$x^2-x+1 = a(x^2+2)+b(x-1)+cx(x-1) \implies$

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 &=& a+c \\ -1 &=& b-c \\ 1 &=& 2a-b \end{array}\right\} a=\frac{1}{3},\ b=-\frac{1}{3},\ c=\frac{2}{3}$$

$$\frac{x^2-x+1}{x^3-x^2+2x-2} = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} - \frac{\frac{1}{3}}{x^2+2} + \frac{\frac{2}{3}x}{x^2+2}$$

7.4 Uneigentliche Integrale

A. Definition und Beispiele

I unendlich, f unbeschränkt : uneigentliche Integrale

Def. 7.4.1 Sei $f : [a,\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar über $[a,R]$ für alle $R \in (a,\infty)$. Falls

$$\lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx \tag{7.4.1}$$

existiert, so heißt $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ konvergent,

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx. \tag{7.4.2}$$

Analog: $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)dx$

Beispiel 7.4.2 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ konvergiert für $s>1$.

$$\int_1^R \frac{dx}{x^s} = \int_1^R x^{-s}dx \overset{\text{Bsp. 7.3.5i)}}{=} \left.\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right|_1^R = \frac{1}{1-s}[R^{-s+1}-1]$$

$$\implies \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{dx}{x^s} = \underbrace{\lim_{R\to\infty}\frac{1}{1-s}R^{-s+1}}_{=0} + \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s-1}$$

Def. 7.4.3 Sei $f : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $[a + \varepsilon, b]$ Riemann-integrierbar. Falls

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \tag{7.4.3}$$

existiert, so heißt $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ konvergent

$$\int_a^b f(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \tag{7.4.4}$$

Beispiel 7.4.4 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ konvergiert für $s < 1$.

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{x^{-s+1}}{-s+1}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-s} - \frac{\varepsilon^{-s+1}}{1-s} \implies$$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s} - \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\varepsilon^{1-s}}{1-s}$$

Def. 7.4.5 Sei $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\ b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und f auf $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ Riemann-integrierbar, $c \in (a, b)$.
Falls

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x)dx &= \lim_{\alpha \searrow a} \int_a^c f(x)dx \qquad (7.4.5) \\ \int_c^b f(x)dx &= \lim_{\beta \searrow b} \int_c^\beta f(x)dx \end{aligned}$$

konvergieren, so heißt $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ konvergent und

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{7.4.6}$$

Beispiel 7.4.6

i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$

Def. 7.4.5 $\implies$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &\overset{(6.4.23)}{=} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \arcsin(x)\Big|_{-1+\varepsilon}^{0} + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \arcsin(x)\Big|_0^{1-\varepsilon} \\ &= -\lim_{\varepsilon \searrow 0} \arcsin(-1+\varepsilon) + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \arcsin(1-\varepsilon) \\ &= -\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) + \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = ?$

Def. 7.4.5 $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R} \frac{dx}{1+x^2} \\
&\overset{(6.4.24)}{=} \lim_{R\to\infty} \arctan(x)\Big|_{-R}^{0} + \lim_{R\to\infty} \arctan(x)\Big|_{0}^{R} \\
&= -\lim_{R\to\infty} \arctan(-R) + \lim_{R\to\infty} \arctan(R) \\
&\overset{\text{Satz } 6.4.13}{=} -\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) + \frac{\pi}{2} = \pi
\end{aligned}$$

B. Integral-Vergleichskriterien

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = ?$$

Satz 7.4.7 Sei $f : [1,\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton fallend. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergent} \iff \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ konvergent.} \tag{7.4.7}$$

Beweis. Es gilt

$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n),\ n \leq x < n+1$

$\delta := f(n+1),\ n \leq x < n+1, \quad \xi = f(n),\ n \leq x < n+1$

$\Longrightarrow\ \delta \leq f \leq \psi \overset{\text{Satz } 7.2.10}{\Longrightarrow}$

$$\int_1^N \delta(x)dx = \sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \int_1^N f(x)dx \leq \int_1^N \psi(x)dx = \sum_{n=1}^{N-1} f(n)$$

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \text{ konvergent} \Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} f(n) \text{ beschränkt}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergent. Umgekehrt:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergent} \Longrightarrow \int_1^{R} f(x)dx \text{ beschränkt, monoton wachsend in } R$$

$$\Longrightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ konvergent}$$ □

Beispiel 7.4.8

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \infty,\ s > 1$$

Beispiel 7.4.3 $\Longrightarrow \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s}$ konvergent für $s > 0$

Satz 7.4.7 $\implies$ Beh.

C. Die Gamma-Funktion

Def. 7.4.9 Die Funktion

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad x > 0 \tag{7.4.8}$$

heißt <u>Gamma-Funktion</u>.

Bem. 7.4.10 $\Gamma(x)$ ist wohldefiniert.

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^{t_0} t^{x-1}e^{-t}dt + \lim_{R\to\infty} \int_{t_0}^R t^{x-1}e^{-t}dt \\ &\leq \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^{t_0} t^{x-1}dt + \lim_{R\to\infty} \int_{t_0}^R t^{x-1}e^{-t}dt \end{aligned}$$

Satz 6.2.6 $\implies \lim_{t\to\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0 \implies t^{x-1}e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}\,,\ t \geq t_0$

$\implies \Gamma(x) \leq \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{t^x}{x}\Big|_\varepsilon^{t_0} + \lim_{R\to\infty} (-t^{-1})\Big|_{t_0}^R = \frac{t_0^x}{x} + t_0^{-1}$

Satz 7.4.11 Es gilt $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie allgemeiner

$$\forall x > 0 : \Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{7.4.9}$$

Beweis. $\int_\varepsilon^R \underbrace{t^x}_{f} \underbrace{e^{-t}}_{g'} dt \overset{\text{Satz 7.3.9}}{=} -t^x e^{-t}\Big|_\varepsilon^R + \int_\varepsilon^R x t^{x-1}e^{-t}dt$

$\implies \lim_{\substack{\varepsilon\searrow 0\\ R\to\infty}} \int_\varepsilon^R t^x e^{-t}dt = \underbrace{\lim_{\substack{\varepsilon\searrow 0\\ R\to\infty}} (-t^x e^{-t})\Big|_\varepsilon^R}_{=0} + \lim_{\substack{\varepsilon\searrow 0\\ R\to\infty}} \int_\varepsilon^R x t^{x-1}e^{-t}dt$

$\implies \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ $\square$

D. Stirlingsche Formel

Def. 7.4.12 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißen <u>asymptotisch gleich</u>, $a_n \sim b_n$, falls

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1. \tag{7.4.10}$$

Satz 7.4.13 Es gilt

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n. \tag{7.4.11}$$

Beweis.

$$\int_k^{k+1} \log(x)dx \overset{\text{Beisp. 7.3.8i)}}{=} \int_0^1 \log(x+k) \overset{\text{Satz 7.3.13}}{=} \frac{1}{2}(\log(k)+\log(k+1))$$
$$-\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{2}x(1-x)}_{\varphi(x)} \log''(x+k)dx$$
$$= \frac{1}{2}\log(k)+\log(k+1)+\int_0^1 \varphi(x)\frac{1}{(x+k)^2}dx$$
$$= \frac{1}{2}\log(k)+\log(k+1)+\int_k^{k+1} \varphi(x-k)\frac{1}{x^2}dx$$

$\widetilde{\varphi}(x) := \frac{1}{2}x(1-x), \quad x \in [0,1]$

$\widetilde{\varphi}(x+n) := \varphi(x), \quad n \in \mathbb{Z},\ x \in [0,1]$

$$\int_k^{k+1} \log(x)dx = \frac{1}{2}\big(\log(k)+\log(k+1)\big) + \int_k^{k+1} \frac{\widetilde{\varphi}(x)}{x^2}dx$$
$$\implies \int_1^n \log(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\big(\log(k)+\log(k+1)\big) + \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} \frac{\widetilde{\varphi}(x)}{x^2}dx$$
$$\implies \underbrace{\int_1^n \log(x)dx}_{n\log n - n+1} = \sum_{k=1}^{n}\log(k) - \frac{1}{2}\log(n) + \int_1^n \frac{\widetilde{\varphi}(x)}{x^2}dx$$
$$\implies \sum_{k=1}^{n}\log(k) = \Big(n+\frac{1}{2}\Big)\log(n) - n + \gamma_n,\ \gamma_n = 1 - \int_1^n \frac{\widetilde{\varphi}(x)}{x^2}dx$$
$$\implies e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\log(k)} = n! = e^{(n+\frac{1}{2})\log(n)-n+\gamma_n} = n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}c_n, \quad c_n := e^{\gamma_n}$$
$$\implies c_n = \frac{n!e^n}{\sqrt{n}n^n}$$

φ beschränkt, $\displaystyle\int_1^\infty x^{-2}dx < \infty \implies \gamma := \lim_{n\to\infty}\gamma_n = 1 - \int_1^\infty \frac{f(x)}{x^2}dx$ existiert

$\implies c := \lim_{n\to\infty} c_n = e^\gamma$ existiert

$$\frac{c_n^2}{c_{2n}} = \frac{(n!)^2\sqrt{2n}(2n)^{2n}}{n^{2n+1}(2n)!} = \frac{(n!)^2\sqrt{2}2^{2n}}{\sqrt{n}(2n)!}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n^2}{c_{2n}} = \frac{c^2}{c} = c$$

(7.3.10) $\displaystyle\implies \pi = 2\prod_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2}{4k^2-1} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdots(2n-1)(2n-1)}$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \Big(2\prod_{k=1}^{n}\Big(\frac{4k^2}{4k^2-1}\Big)\Big)^{1/2} &= \sqrt{2}\,\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{3\cdot 5\cdots(2n-1)\sqrt{(2n+1)}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}\,\frac{2^2\cdot 4^2\cdots(2n)^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot 2n}\\
&= \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}\,\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \quad \Longrightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} \quad \Longrightarrow \quad c = \sqrt{2\pi} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}} = 1 \qquad \square
$$

8 Konvexe Funktionen

A. Definition und Beispiele

Def. 8.1 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt <u>konvex</u>, wenn

$$
\forall x_1, x_2 \in I,\ 0 < \lambda < 1 : f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2). \tag{8.1}
$$

f heißt <u>konkav</u>, wenn $-f$ konvex ist.

Satz 8.2 Sei I ein offenes Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. f ist genau dann konvex, wenn $\forall x \in I : f''(x) \geq 0$.

Beweis. „$\Longleftarrow$“ $\forall x \in I : f''(x) \geq 0 \overset{\text{Satz 5.3.8}}{\Longrightarrow} f'$ monoton wachsend

$x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2,\ x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$

$x_1 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_1 \leq \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x \leq \lambda x_2 + (1-\lambda)x_2 = x_2$

Korollar 5.3.5 $\Longrightarrow \exists \xi_1 \in (x_1, x),\ \xi_2 \in (x, x_2)$ mit

$$
\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
x - x_1 &= \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - x_1 = (1-\lambda)(x_2-x_1)\\
x_2 - x &= x_2 - \lambda x_1 - (1-\lambda)x_2 = \lambda(x_2-x_1)
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{f(x)-f(x_1)}{(1-\lambda)(x_2-x_1)} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{\lambda(x_2-x_1)}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad \lambda\big(f(x)-f(x_1)\big) &\leq (1-\lambda)\big(f(x_2)-f(x)\big)\\
\Longleftrightarrow \quad f(x) &\leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)
\end{aligned}
$$

„$\Longrightarrow$“ Annahme: $f''(x_0) < 0$ für ein $x_0 \in I$

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= f(x) - f'(x_0)(x-x_0)\\
\Longrightarrow \quad \varphi'(x_0) &= f'(x_0) - f'(x_0) = 0\\
\varphi''(x_0) &= f''(x_0) < 0
\end{aligned}
$$

Satz 5.3.10 $\Longrightarrow \varphi$ besitzt in x_0 strenges lokales Minimum, d.h.

$$\varphi(x_0-h)>\varphi(x_0),\ \varphi(x_0+h)>\varphi(x_0),\ \text{für } h \text{ hinreichend klein}$$

$$\Longrightarrow\quad f(x_0)=\varphi(x_0)>\frac{1}{2}\big(\varphi(x_0-h)+\varphi(x_0+h)\big)=\frac{1}{2}\big(f(x_0-h)+f(x_0+h)\big)$$

$$x_1:=x_0-h,\ x_2=x_0+h,\ \lambda:=\frac{1}{2}\ \Longrightarrow\ \lambda x_1+(1-\lambda)x_2=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2=x_0$$

$$\Longrightarrow\ f(x_0)=f(\lambda x_1+(1-\lambda x_2)\geq\lambda\cdot f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$ □

Bespiele 8.3

i) $f(x)=5x^2-7x+1,\ f'(x)=10x-7,\ f''(x)=10>0\ \Longrightarrow\ f(x)$ konvex

ii) $f(x)=e^x,\ f'(x)=f''(x)=e^x>0,\ e^x$ konvex

iii) $f(x)=\cos(x),\ x\in\Big(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\Big)$

$f'(x)=-\sin(x),\ f''(x)=-\cos(x)<0,\ x\in\Big(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\Big)\ \Longrightarrow \cos(x)$ konkav

iv) $f(x)=\log(x),\ x\in\mathbb{R}_+$

$f'(x)=\dfrac{1}{x},\ f''(x)=-x^{-2}<0\ \Longrightarrow\ \log(x)$ konkav

Satz 8.4 (Young-Ungleichung) Seien $p,q\in(1,\infty),\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Dann gilt

$$\forall x,y\in\mathbb{R}_+: x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}\leq\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\,. \tag{8.2}$$

Beweis. Beispiel 8.3 iv). $\log(x)$ konkav $\Longrightarrow$

$\log(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq\lambda\log(x)+(1-\lambda)\log(y)$

$\lambda=\dfrac{1}{p}\ \Longrightarrow\ 1-\lambda=\dfrac{1}{q}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\quad \log\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right) &\geq \tfrac{1}{p}\log(x)+\tfrac{1}{q}\log(y)\\
\Longrightarrow\quad e^{\log(\frac{x}{p}+\frac{y}{q})} &\geq e^{\frac{1}{p}\log(x)}\cdot e^{\frac{1}{q}\log(y)}\\
\Longrightarrow\quad x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}} &\leq \frac{x}{p}+\frac{y}{q}
\end{aligned}$$

□

B. Hölder- und Minkowski-Ungleichung

Def. 8.5 Die Abbildung

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}^n &= \underbrace{\mathbb{C}\times\cdots\times\mathbb{C}^n}_{n-\mathrm{mal}}\longrightarrow\mathbb{R}\\
x &= (x_1,\ldots,x_n)\longmapsto\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}
\end{aligned} \tag{8.3}$$

heißt $\underline{p\text{-Norm}}$.

($\|x\|_p = 0 \Longleftrightarrow x = 0,\ \|\lambda x\|_p = |\lambda|\|x\|_p$)

Satz 8.6 (Hölder-Ungleichung)

Seien $p, q \in (1, \infty),\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n : \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \le \|x\|_p \|y\|_q. \tag{8.4}$$

Beweis. o.B.d.A. $\|x\|_p \neq 0,\ \|y\|_q \neq 0$

$$\xi_k = \frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p},\ \eta_k := \frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q} \implies \sum_{k=1}^{n} \xi_k = \sum_{k=1}^{n} \eta_k = 1$$

Satz 8.4, $x = \xi_k, y = \eta_k \implies (\xi_k)^{y_p}(\eta_k)^{y_q} = \dfrac{|x_k|}{\|x\|_p}\dfrac{|y_k|}{\|y\|_q} \le \dfrac{\xi_k}{p} + \dfrac{\eta_k}{q}$

$$\implies \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|}{\|x\|_p}\frac{|y_k|}{\|y\|_q} \le \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{\xi_k}{p} + \frac{\eta_k}{q}\Big) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

□

Satz 8.7 (Minkowski-Ungleichung)

Sei $p \in [1, \infty)$. Dann gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n : \|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p. \tag{8.5}$$

Beweis. $p = 1\ \surd$

$$p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ z = (z_1, \ldots, z_n),\ z_k := |x_k + y_k|^p$$

$$\implies z_k^q = |x_k + y_k|^{(p-1)q} = |x_k + y_k|^{\frac{p}{p-1}(p-1)} = |x_k + y_k|^p$$

$$\implies \|z\|_q = \Big(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^q\Big)^{1/q} = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\Big)^{1/q} = \|x + y\|_p^{p/q}$$

$$\begin{aligned}\implies \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k||z_k| &\le \sum_{k=1}^{n} |x_k||z_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k||z_k| \\ &\overset{(8.4)}{\le} \|x\|_p\|z\|_q + \|y\|_p\|z\|_q \\ &\le \big(\|x\|_p + \|y\|_p\big)\|x + y\|_p^{p/q}\end{aligned}$$

$$\implies \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k||x_k + y_k|^{p-1} = \|x + y\|_p^p \le \big(\|x\|_p + \|y\|_p\big)\|x + y\|_p^{p/q}$$

$$\implies \|x + y\|_p^{p - \frac{p}{q}} = \|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$$

□